11

$\boxed{D31}$

a) $\dot{N}_A = k_1 N - (k_1+k_2) N_A + A(t)$

$N_A(t) = \tilde{N}_A(t)\, e^{-(k_1+k_2)t}$ נניח פתרון הומוגני

$\dot{\tilde{N}}_A(t) = k_1 N e^{(k_1+k_2)t} + A(t)\, e^{(k_1+k_2)t}$ [illegible]

$\langle \tilde{N}_A(t) \rangle = k_1 N \int_0^t e^{(k_1+k_2)t'} dt' = \frac{k_1}{k_1+k_2} N \left( e^{(k_1+k_2)t} - 1 \right)$

[illegible] $t \to \infty$ [illegible]

$\langle N_A \rangle = \frac{k_1}{k_1+k_2} N$

$\langle N_A \rangle = \frac{\rho_A}{\rho_A+\rho_B} N$ [illegible] A24 [illegible]

$\langle N_B \rangle = \frac{\rho_B}{\rho_A+\rho_B} N$

$\frac{\langle N_A \rangle}{\langle N_B \rangle} = \frac{\rho_A}{\rho_B} = \frac{k_1}{k_2}$ [illegible]

equilibrium [illegible]

Detailed Balance [illegible]

$P(N_A) \cdot \Omega_{A\to B} = P(N_B) \cdot \Omega_{B\to A}$

$$\frac{dN_A}{dt} = \delta \dot{N}_A$$

$$\delta N_A(t) = e^{-(k_1+k_2)t} \int_0^t \left(k_1 N + A(t')\right) e^{(k_1+k_2)t'} dt' - \langle N_A \rangle$$

$$= \frac{-k_1}{k_1+k_2} N e^{-(k_1+k_2)t} + \frac{k_1}{k_1+k_2} N - \langle N_A \rangle + e^{-(k_1+k_2)t} \int_0^t A(t') e^{(k_1+k_2)t'} dt'$$

$$\langle \delta N_A^2(t) \rangle = \left( \frac{k_1 N}{k_1+k_2} e^{-(k_1+k_2)t} \right)^2 + e^{-2(k_1+k_2)t} C \int_0^t e^{2(k_1+k_2)t'} dt'$$

$$\xrightarrow{t \to \infty} \frac{C}{2(k_1+k_2)} \rightarrow C = 2(k_1+k_2) \langle \delta N_A^2 \rangle$$

$$\langle \delta N_A^2 \rangle = \frac{\langle N_A \rangle \langle N_B \rangle}{N}$$ A2u) od bc

$$= N \cdot \frac{k_1 k_2}{(k_1+k_2)^2}$$

$$\boxed{C = \frac{2 k_1 k_2}{k_1+k_2} \cdot N}$$

pd

רעשין ...

(c) $\mu_B(t) = \mu_B + \delta\mu_B = \mu_B + \delta\mu_B(\omega)e^{-i\omega t}$

$\langle N_A(t)\rangle = \alpha_\omega\, \delta\mu_B(\omega) e^{-i\omega t} + \langle \tilde{N}_A\rangle_{equilibrium}$ נגדיר $\alpha(\omega)$

קודם כל נראה ש- $\delta\mu_B(t) = -kT\dfrac{\delta k_2(t)}{k_2}$

עבור $Z_B = \dfrac{\rho_B^{N_B}}{N_B!} \rightarrow \mu_B = -kT\dfrac{\partial \ln Z}{\partial N_B} = -kT\ln\dfrac{\rho_B}{N_B}$

כיון ש- $\dfrac{k_2}{k_1} = \dfrac{\rho_B}{\rho_A}$

$\dfrac{k_2+\delta k_2}{k_1} = \dfrac{\rho_B+\delta\rho_B}{\rho_A} = \dfrac{\rho_B}{\rho_A}\left(1+\dfrac{\delta\rho_B}{\rho_B}\right) = \dfrac{k_2}{k_1}\left(1+\dfrac{\delta k_2}{k_2}\right)$

כמו כן

$\mu_B = \mu_{B0} + \delta\mu_B = -kT\ln\dfrac{\rho_{B0}+\delta\rho_B}{N_B} = -kT\ln\left(\dfrac{\rho_{B0}}{N_B}\left(1+\dfrac{\delta\rho_B}{\rho_B}\right)\right)$

$= -kT\ln\dfrac{\rho_{B0}}{N_B} - kT\ln\left(1+\dfrac{\delta\rho_B}{\rho_B}\right) \approx \mu_{B0} - kT\dfrac{\delta\rho_B}{\rho_B}$

לכן $\boxed{\delta\mu_B \approx -kT\dfrac{\delta\rho_B}{\rho_B} = -kT\dfrac{\delta k_2}{k_2}}$

ועכשיו נחזור למשוואת הקצב $(\gamma = k_1+k_2)$

$\dfrac{d\tilde{N}_A}{dt} = k_1 N e^{\gamma t} + A(t)e^{\gamma t} - \delta k_2 e^{-i\omega t}\tilde{N}_A$

עבור $\delta k=0$ הפתרון $\langle \tilde{N}_{A0}\rangle = \dfrac{k_1}{k_1+k_2}\cdot N\cdot(e^{\gamma t}-1)$ (כפי שנמצא קודם)

$\langle N_A\rangle = e^{-(k_1+k_2)t}\langle \tilde{N}_{A0}\rangle - \delta k_2 e^{-\gamma t}\int^t e^{-i\omega t'}\dfrac{k_1 N}{\gamma}(e^{\gamma t'}-1)dt'$ ועל כל

ועבור $t\to\infty$ $= \langle N_A\rangle_{equ} - \delta k_2\cdot\dfrac{k_1 N}{\gamma}\dfrac{e^{-i\omega t}}{-i\omega+\gamma}$

$$\delta N_B = -\delta k_2 \frac{k_1 N}{\gamma} \frac{e^{-i\omega t}}{-i\omega+\gamma}$$

ניקח

$$\delta N_B = \alpha(\omega)\, \delta\mu_B\, e^{-i\omega t}$$

אם לפי הגדרה

$$\delta\mu_B = \frac{-kT\,\delta k_2}{k_2}$$

כאשר מציבים

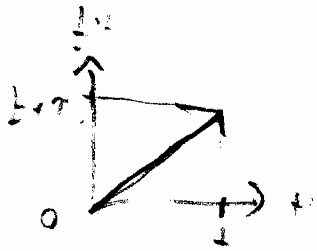
$$\boxed{\alpha(\omega) = \frac{k_1 k_2 N}{kT\gamma(-i\omega+\gamma)}}$$

נקבל

3) כעת נעשה את הדבר השני של שאלה FDT ונשווה בין התוצאות...

$$\langle \delta N_A(t)\, \delta N_A(t+\tau)\rangle = \Big\langle \Big(-\frac{k_1 N}{\gamma} e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t}\int_0^t A(t') e^{\gamma t'} dt'\Big) \cdot \Big(-\frac{k_1 N}{\gamma} e^{-\gamma(t+\tau)} + e^{-\gamma(t+\tau)}\int_0^{t+\tau} A(t'') e^{\gamma t''} dt''\Big)\Big\rangle$$

$$= \left(\frac{k_1 N}{\gamma}\right)^2 e^{-2\gamma t-\gamma\tau} + e^{-2\gamma t-\gamma\tau} \underbrace{\int_0^{t}\int_0^{t+\tau} e^{\gamma t'} e^{\gamma t''}\, C\,\delta(t''-t')}_{\int_0^{t+\tau} e^{2\gamma t''} dt''}$$




$$\xrightarrow{t\to\infty} \frac{C}{2\gamma} e^{-\gamma|\tau|}$$

עבור $t\to\infty$ נקבל

$$C_{A}(\omega) = \frac{C}{2\gamma}\int e^{-\gamma|\tau|+i\omega\tau} d\tau = \frac{C}{\omega^2+\gamma^2}$$

נקבל

$$= \frac{2k_1k_2N}{\gamma}\,\frac{1}{\gamma^2+\omega^2}$$

נציב $C$ מסעיף (2) נקבל

$$\frac{2k_BT}{\omega}\, \mathrm{Im}\, \alpha_\omega = \frac{2k_BT}{\omega}\cdot\frac{k_1k_2N}{kT\gamma}\cdot\frac{\omega}{\gamma^2+\omega^2} = C_A(\omega)$$

נתבונן על

נהדר!