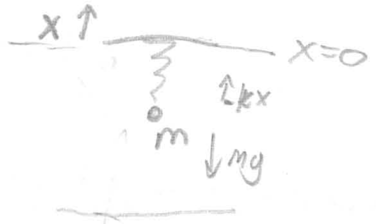
D22 (HW 2008, 10.3)
(HW 2009 10.2)



(א)

$$\mathcal{H} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 + mgx$$

$$\frac{1}{\lambda_T} = \int \frac{dp}{2\pi\hbar} \cdot e^{-\frac{\beta p^2}{2m}}$$ האינטגרציה על התנע נתן

$$Z = \frac{1}{\lambda_T} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\beta\left(\frac{1}{2}kx^2 + mgx\right)} = \frac{1}{\lambda_T} \int_{-\infty}^{\infty} d\underbrace{\left(x + \frac{mg}{k}\right)}_{= \tilde{x}} e^{-\frac{\beta}{2}k\left(x+\frac{mg}{k}\right)^2 + \frac{\beta m^2 g^2}{2k}}$$

$$Z = \frac{1}{\lambda_T} \cdot \sqrt{\frac{2\pi}{\beta k}} \cdot e^{\frac{\beta m^2 g^2}{2k}}$$

$$\langle x \rangle = \frac{1}{Z} \cdot \frac{1}{\lambda} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\tilde{x} - \frac{mg}{k}\right) e^{-\frac{\beta}{2}k\tilde{x}^2} e^{\frac{\beta}{2k}m^2 g^2} d\tilde{x}$$

$$= \frac{1}{Z} \cdot e^{\frac{\beta}{2k}m^2 g^2} \cdot \frac{1}{\lambda_T} \cdot \left[\underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{x} e^{-\frac{\beta}{2}k\tilde{x}^2} d\tilde{x}}_{=0} - \frac{mg}{k} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{\beta}{2}k\tilde{x}^2} d\tilde{x} \right]$$

$$\langle x \rangle = -\frac{mg}{k} \leftarrow \langle x \rangle = \left\langle \tilde{x} - \frac{mg}{k} \right\rangle = -\frac{mg}{k}$$ או בקצרה,

$$\left\langle x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right\rangle = k_B T$$ לפי המשפט הויריאלי

$$= \langle x \cdot (kx + mg) \rangle = k\langle x^2 \rangle + mg\langle x \rangle$$

$$\rightarrow \frac{1}{k} \left\langle x \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x} \right\rangle = \frac{k_B T}{k} = \langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2 = \langle \delta x^2 \rangle$$

$$\langle \delta x^2 \rangle \ll \langle x \rangle^2$$ כדי שנוכל למדוד המסה נדרוש

$$\frac{k_B T}{k} \ll \frac{m^2 g^2}{k^2} \rightarrow m^2 \gg \frac{k_B T \cdot k}{g^2} \rightarrow m \gg \sqrt{\frac{k_B T \cdot k}{g^2}}$$

נ"ב דיוק טוב = קפיץ חלש וטמפרטורה נמוכה!

(5) נכתוב משוו' לנג'וין:

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \frac{k}{m}x - g = A(t)$$

$$x - \langle x \rangle = \tilde{x} = x + \frac{mg}{k}$$ בקואורדינטות מוזזות

$$\langle \tilde{x} \rangle = 0 \quad , \quad \dot{\tilde{x}} = \dot{x}$$

$$\ddot{\tilde{x}} + \gamma \dot{\tilde{x}} + \frac{k}{m}\tilde{x} = A(t)$$

ע"י טרנספורם פוריה:

$$\tilde{x}(\omega) = \frac{A(\omega)}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right) - i\gamma\omega}$$

ולכן

$$\langle |\tilde{x}(\omega)|^2 \rangle = \frac{\langle |A(\omega)|^2 \rangle}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

ממשפט Wiener-Khinchin

$$\varphi_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \cdot \langle |\tilde{x}_\omega|^2 \rangle$$

$$\varphi_A(\omega) = \frac{\Delta\omega}{2\pi} \langle |A_\omega|^2 \rangle$$

נקבל

$$\varphi_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{\varphi_A(\omega)}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

אבל הרעש חסר קורלציה לכן

$$\varphi_A(\omega) = C$$

כך ש- $\left[\int \varphi_A(\omega) e^{i\omega t} \frac{d\omega}{2\pi} = C\delta(t)\right]$

לכן

$$\varphi_{\tilde{x}}(t=0) = FT\left[\varphi_{\tilde{x}}(\omega) \text{ at } t \to 0\right] = \langle \tilde{x}^2(t) \rangle$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{C}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} \cdot \frac{d\omega}{2\pi}$$

$$= \frac{m\pi}{\gamma k} \cdot \frac{C}{2\pi} = \frac{m}{2\gamma k} C$$ נשווה $=$ לפי ע.ה. $\tilde{x}$ $$\frac{k_B T}{k}$$

$$\boxed{C = \frac{k_B T}{m} \cdot 2\gamma}$$

$$\mathcal{H}_1 = -\frac{f}{m}F \rightarrow \dot{x} = +\frac{\partial \mathcal{H}_1}{\partial p} = -\frac{1}{m}f \Rightarrow \dot{x} = -\frac{1}{m}\dot{F}$$

כעת

$$\ddot{\tilde{x}} = -\gamma\dot{\tilde{x}} + A - \frac{k}{m}\tilde{x} - \frac{1}{m}\frac{\partial F}{\partial t}$$

נשים לב ש-

$$\dot{x}_t = v_t$$

$$-i\omega x_\omega = v_\omega \rightarrow x_\omega = \frac{i}{\omega}v_\omega$$

מכאן

$$-i\omega v_\omega = -\gamma v_\omega + A_\omega - \frac{ik}{m\omega}v_\omega + \frac{i\omega F}{m}$$

$$v_\omega = \frac{1}{m}\cdot\frac{i\omega F_\omega}{\gamma + i\left(\frac{k}{m\omega} - \omega\right)} = \underbrace{\frac{1}{m}\frac{i\omega\left(\gamma - i\left(\frac{k}{m\omega} - \omega\right)\right)}{\gamma^2 + \left(\frac{k}{m\omega} - \omega\right)^2}}_{=\alpha_v(\omega)} F_\omega$$

מכאן

$$\operatorname{Im}\alpha_v(\omega) = \frac{\omega\gamma}{m\left(\gamma^2 + \left(\frac{k}{m\omega} - \omega\right)^2\right)}$$

מצאנו בסעיף ב':

$$\varphi_{\tilde{x}}(\omega) = \frac{\varphi_A(\omega)}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

$$= \frac{C}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2} = \left(\frac{k_BT}{m}\cdot 2\gamma\right)\frac{1}{\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 + \gamma^2\omega^2}$$

(הערך המוחלט לפי Wiener-K.)

$$\varphi_v(\omega) = |-\omega|^2\varphi_{\tilde{x}}(\omega) = \left(\frac{k_BT}{m}\cdot 2\gamma\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{k}{m\omega} - \omega\right)^2 + \gamma^2}$$

לכן

ואכן

$$\frac{2k_BT}{\omega}\cdot\operatorname{Im}\alpha_v(\omega) = \left(\frac{2k_BT\gamma}{m}\right)\cdot\frac{1}{\left(\frac{k}{m\omega} - \omega\right)^2 + \gamma^2}$$

והוכחנו ש-

$$\frac{2k_BT}{\omega}\operatorname{Im}\alpha_v(\omega) = \varphi_v(\omega)$$