D30 (2008 11.3) (2009 11.2) (2010 11.3)

$$\left[\frac{1}{2m}(p^2) \xrightarrow{\bar A} \frac{1}{2m}\left(\bar p - \frac{e}{c}\bar A\right)^2 = \frac{p^2}{2m} - \frac{e\bar p}{cm}\bar A = \frac{p^2}{2m} - \frac{e}{c}\bar v\cdot\bar A\right]$$

(א

$$V_{int} = -\frac{e}{c}\sum_i \bar v_i \bar A \qquad \bar E = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar A}{\partial t}$$

$$= +\left(\sum_i \bar v_i\right)\cdot\bar F \qquad \bar F_w = -\frac{e}{c}\bar A_w = \frac{e}{iw}\bar E_w$$

(עבור $\bar E \sim e^{iwt}$)

$$\sum_i \langle \bar v_i\rangle_w = \alpha_v(w)\cdot F_w = \alpha_v(w)\,\frac{e}{iw}\,\bar E$$

$$J_w = e\sum_i\langle v_i\rangle_w = \alpha_v(w)\cdot\frac{e^2}{iw}\bar E_w \underset{\text{חוק אוהם}}{\overset{\text{נדרוש}}{=}} \sigma_w \bar E_w$$

מכאן

$$\mathrm{Im}\,\alpha_v(w) = \frac{w}{e^2}\cdot \mathrm{Re}(\sigma_w) \leftarrow \alpha(w) = \frac{iw}{e^2}\sigma_w$$

הדיסיפציה Q

$$Q = \frac12 w\,\mathrm{Im}\,\alpha_v(w)\,|F|^2 = \frac12\,\frac{\cancel{w^2}}{\cancel{e^2}}\cdot\frac{\cancel{e^2}}{\cancel{w^2}}|E_w|^2\cdot \mathrm{Re}(\sigma_w)$$

עבור $j_w = \mathrm{Re}(\sigma_w)E_w$

נקבל את חוק אוהם:

$$Q = \frac12\, j\cdot E$$

(נשים לב שזה אחרי ממוצע על הזמן לגבי החום $\frac{dE}{dt}$)

מכיוון שהדיסיפציה כמות חיובית נקבל

$$w\,\mathrm{Im}\,\alpha_v(w) = \frac{w^2}{e^2}\mathrm{Re}(\sigma_w) \ge 0$$

לכן עבור $w\to -w$ נקבל $\mathrm{Re}(\sigma_w)=\mathrm{Re}(\sigma_{-w})$, סימטרי ב- $w\to-w$

ולפי Kramers Kronig:

$$\mathrm{Im}(\sigma_w) = -\frac1\pi\, P\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}(\sigma_{w'})}{w'-w}\,dw' \Rightarrow \mathrm{Im}(\sigma_w) = -\mathrm{Im}(\sigma_{-w})$$

ב) לפי משפט FDT:

$$\frac{2k_BT}{w}\,\mathrm{Im}\,\alpha_v(w) = \varphi_v(w)$$

$$\frac{2k_BT}{e^2}\cdot\mathrm{Re}(\sigma_w) = \int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot e^{+iwt}\cdot\left\langle\sum_i V_i(0)\sum_j V_j(t)\right\rangle$$

$$\text{ממשי} = \int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot\cos(wt)\cdot\left\langle \frac{j(t=0)\,j(t)}{e^2}\right\rangle$$

(פונקציה סימטרית ב- $t\to -t$ ולכן $\int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow 2\int_0^{\infty}$)

$$\boxed{\mathrm{Re}(\sigma_w) = \frac{1}{k_BT}\int_0^{\infty}dt\cdot\cos(wt)\cdot\langle j(0)\,j(t)\rangle}$$

ב) כדי למצוא את מקדם הדיפוזיה נסתכל על

$\langle r^2\rangle = 6Dt$

אך

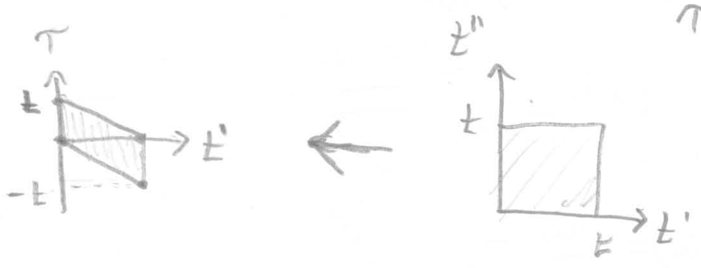
$$\vec r(t) = \int_0^t dt' \, \vec v(t')$$

לכן

$$\langle r^2\rangle = \int_0^t dt' \int_0^t dt'' \, \langle \vec v(t') \vec v(t'')\rangle$$

נגדיר $\tau = t''-t'$

תחום האינטגרציה



אבל מכיוון ש- $\langle \vec v(t') \vec v(t'+\tau)\rangle \propto e^{-\lambda t}$ אז

ניתן להרחיב את גבולות האינטגרציה $\int_{t'}^{t'+t} d\tau \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\tau$

לכן

$$\langle r_i^2\rangle = \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \cdot \underbrace{\langle \vec v_i(t') \vec v_i(t'+\tau)\rangle}_{\text{אינו תלוי ב-}t'\text{ לכן}}$$

$$= \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \langle \vec v_i(0) \vec v_i(\tau)\rangle$$

$$\langle r^2\rangle = t\int_{-\infty}^{\infty} d\tau \, \langle \vec v_i(0) \vec v_i(\tau)\rangle \overset{\text{נדרוש}}{=} 6Dt$$

לכן

$$D = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \langle \vec v_i(0) \vec v_i(\tau)\rangle d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \left(\langle v_x(0) v_x(\tau)\rangle + \langle v_y(0) v_y(\tau)\rangle + \langle v_z(0) v_z(\tau)\rangle\right) d\tau$$

מכיוון ש- $\langle v_{x} v_{y}\rangle = 0$ כאשר אין קורלציה בין רכיבים המרחביים השונים.

מכיוון שאין כיוון מועדף הרי $\langle v_x v_x(\tau)\rangle = \langle v_y v_y(\tau)\rangle =$

(רק רכיבי j=i תורמים, לכן $\frac{1}{n}$ ולא $\frac{1}{3n}$)

לכן

$$D = \int_0^{\infty} \langle \vec v_i(0) \vec v_i(\tau)\rangle d\tau = \frac{1}{ne^2}\int_0^{\infty} \langle j(0) j(t)\rangle dt = \frac{k_B T \, Re(\sigma_{\omega\to 0})}{ne^2}$$

$$\boxed{\frac{eD}{k_B T} = \frac{Re(\sigma_{\omega\to 0})}{ne}}$$

כנדרש:

$$S(\omega) = \int_0^\infty dt \cos\omega t \cdot \langle j_a(t) j_a(0) + j_a(0) j_a(t) \rangle$$

$$\left[\begin{array}{l} K(\tau) = \frac{1}{2} \langle j(\tau) j(0) + j(0) j(\tau) \rangle \\ S(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau \qquad \left(\int_{-\infty}^{\infty} \sin\omega t\, K(\tau) = 0 \right) \end{array} \right] \text{לפי}$$

$$K(\tau) = K(-\tau)$$

(Correlation defined on $V_i = \frac{j_i}{e}$, response $\langle \frac{j}{e} \rangle = \sum_i \langle V_i \rangle = \alpha_\omega F$)

Q-FDT:

$$\frac{S(\omega)}{e^2} = \hbar \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \operatorname{Im}(\alpha_V(\omega))$$

$$= \frac{\hbar\omega}{e^2} \coth\left(\frac{\beta\hbar\omega}{2}\right) \operatorname{Re}\sigma_\omega$$

עבור

High-T:

$$\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \approx \frac{2kT}{\hbar\omega} \qquad \hbar\omega \ll kT$$

$$S(\omega) \xrightarrow{\hbar\to 0} 2kT \operatorname{Re}\sigma(\omega)$$

but for $\hbar \to 0$ $j(0), j(\tau)$ commute, ie.

$$S(\omega) \to 2\int_0^\infty \langle j(\tau) j(0) \rangle \cos\omega t = 2kT \operatorname{Re}\sigma_\omega$$

וקיבלנו חזרה את הגבול הקלאסי.

עבור

T→0:

$$\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right) \to \operatorname{sign}(\omega)$$

$$S(\omega) \xrightarrow{T\to 0} \hbar\omega \cdot \operatorname{sign}(\omega) \cdot \operatorname{Re}\sigma_\omega$$

$$= \hbar|\omega| \operatorname{Re}\sigma_\omega$$