[C07] HW 2009,7.B

Inhomogeneous Magnet

(c)

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle ij\rangle} S_i S_j - \sum_i H_i S_i \qquad S_i = \pm 1\ ,\ J>0$$

נקבל $S_j = m(r_j)$ — נבצע הכללת MF

$$\mathcal{H} = -J\sum_i S_i\cdot\Big[m(r_i+\hat{x}a)+m(r_i-\hat{x}a)+m(r_i+\hat{y}a)+m(r_i-\hat{y}a)+m(r_i+\hat{z}a)+m(r_i-\hat{z}a)\Big] - \sum_i S_i H_i(r)$$

$$\left[m(r+\delta)\approx m(r)+\frac{\partial m}{\partial r}\delta+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 m}{\partial r^2}\delta^2\right]$$

$$\approx -\sum_i S_i\cdot\Big[6Jm(r_i)+Ja^2\nabla^2 m(r_i)+H_i\Big]$$

$$= -\sum_i S_i H_i^{eff}$$

מכאן, בכלל

$$m(r) = \tanh\left(\beta H^{eff}(r)\right)$$

$$= \tanh\left(\beta J\left(6m(r)+a^2\nabla^2 m(r)\right)+\beta H(r)\right)$$

$$m(r) \approx \beta J\left(6m(r)+a^2\nabla^2 m(r)\right)+\beta H(r) \qquad \underline{T>T_c} \qquad (2)$$

(i) השדה אחיד, הכל אחיד ומכאן ש

$$m \approx 6\beta J m + \beta H$$

$$m \approx \frac{H}{kT-6J} = \frac{H}{k(T-T_c)}\ ,\ T_c = 6J$$

(ii) עבור $H(r)=\alpha\delta^3(r)$

עבור כל מרכיב k

כמו בסעיף

ואז

$$\mathcal{H}(k) = \alpha \qquad ,\ m(k) = \int m(r)e^{ikr}d^3r$$

$$\nabla^2 \to -k^2$$

$$m(k) = \left(6\beta J - \beta J a^2 k^2\right)m(k) + \beta\alpha$$

$$m(k) = \frac{\alpha}{k_B T - 6J + Ja^2k^2} = \frac{\alpha/k_B}{(T-T_c)(1+\xi^2k^2)} \qquad \boxed{\xi^2 = \frac{Ja^2}{k_B(T-T_c)}}$$

וכעת נותר לבצע טרנספורם הפוך

$$m(\vec r) = \int m(\vec k)\, e^{-i\vec k\cdot\vec r}\, \frac{d^3k}{(2\pi)^3}$$

$$\sim \int \frac{e^{-i\vec k\cdot\vec r}}{1+\xi^2k^2}\, d^3k = \int_0^\infty k^2\,dk \int_{-1}^{1} \frac{e^{-ikr\cos\theta}}{1+\xi^2k^2}\, d(\cos\theta)$$

$$\sim \frac{1}{r}\int_0^\infty k\,dk\, \frac{2\sin(kr)}{1+\xi^2k^2}$$

פונק׳ זוגית

$$\sim \frac{1}{r}\int_{-\infty}^{\infty} k\,dk\, \frac{\sin(kr)}{1+\xi^2k^2} = \frac{1}{r}\mathrm{Re}\left[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{k\,e^{ikr}}{1+\xi^2k^2}\, dk\right]$$

במישור המרוכב קטבים ב- $k=\pm\frac{i}{\xi}$

$$\sim \frac{1}{r}\cdot 2\pi i\, \mathrm{Res}(\cdots) \sim \frac{1}{r}e^{-r/\xi}$$

השדה $H \propto \delta(\vec r)$ את ומשמעו כופה על הספין ב- $r=0$
להצביע מעלה (מסק) וכו׳

$$C_{0r} = \langle m(0)\,m(\vec r)\rangle = \langle m(\vec r)\rangle \propto \frac{1}{r}e^{-r/\xi}$$

כאשר ξ אורך הקורלציה.