$\boxed{CO4}$ (מ.ר פבר 2009)

$$U = \frac{\bar p_i\cdot\bar p_j - 3(\bar p_i\cdot\bar r_{ij})(\bar p_j\cdot\bar r_{ij})/r_{ij}^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

(א) עבור $\bar p_i \| \bar r_{ij}$ כלומר $\bar r_{ij}\|\hat x$ נקבל

$$U_{ij} = -\frac{2\bar p_i\cdot\bar p_j}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$U_{ij} = -2U_0$$

מכאן שהאנרגיה הנמוכה כאשר $\bar p_i = \bar p_j$ או כשנשמן

$$U_0 = \frac{p^2}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

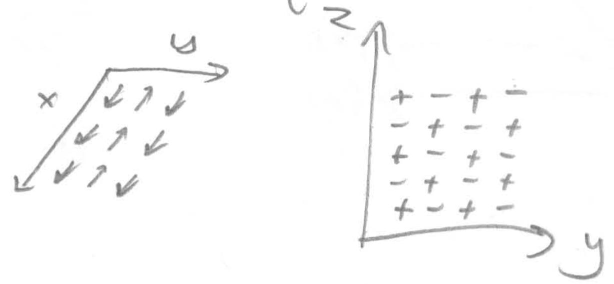
עבור $\bar r_{ij}\perp\hat x$ כלומר $\bar p_i\cdot\bar p_j \perp \bar r_{ij}$ נקבל

$$U_{ij} = +\frac{\bar p_i\cdot\bar p_j}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

$$U_{ij} = -U_0$$

לכן $\bar p_i = -\bar p_j$ (כיוונים הפוכים), כלומר ומצב היסוד יראה כך:

ויהיו שרשראות בכיוון $\hat x$ כאשר לכל שרשרת 4 שרשראות שכנות עם קיטוב הפוך.



(ב) נגדיר שתי תתי שריגים (sublattice)

A = מומנט + כלומר $y+z=\text{even}$

B = מומנט - כלומר $y+z=\text{odd}$

ונקבל את ההמילטוניאן הבא:

$$\mathcal{H} = -2U_0\sum_{\substack{i\in A\\ j\in A}}^{\bar r_{ij}\|\hat x}\frac{p_i p_j}{p^2} + U_0\sum_{\substack{i\in A\\ j\in B}}^{\bar r_{ij}\|\hat y}\frac{p_i p_j}{p^2} + U_0\sum_{\substack{i\in A\\ j\in B}}^{\bar r_{ij}\|\hat z}\frac{p_i p_j}{p^2}$$

$$-2U_0\sum_{\substack{i\in B\\ j\in B}}^{\bar r_{ij}\|\hat x}\frac{p_i p_j}{p^2} + 2U_0\sum_{\substack{i\in B\\ j\in A}}^{\bar r_{ij}\|\hat y,\hat z}\frac{p_i p_j}{p^2} - E\sum_{i\in A}p_i - E\sum_{i\in B}p_i$$

נבצע קירוב MF (שדה ממוצע) לקבל

$$\left.\begin{aligned}\mathcal{H} = &-2U_0 P_A\sum_{i\in A}\frac{p_i}{p^2} + 2U_0 P_B\sum_{i\in A}\frac{p_i}{p^2} - E\sum_{i\in A}p_i\\ &-2U_0 P_B\sum_{i\in B}\frac{p_i}{p^2} + 2U_0 P_A\sum_{i\in B}\frac{p_i}{p^2} - E\sum_{i\in B}p_i\end{aligned}\right\} = \mathcal{H}_A + \mathcal{H}_B$$

$$E_1 = \frac{1}{2}\left(-U_0\cdot 4 - 2U_0\cdot 2\right) = -4U_0$$

נשים לב שהאנרגיה באתר אחד

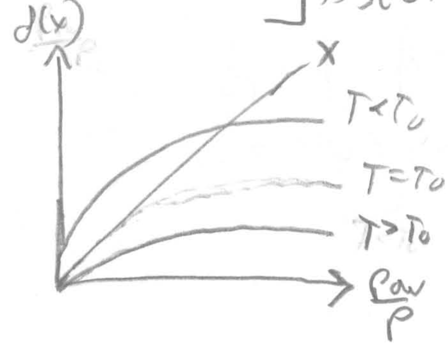
בשדה אפס, נתבונן על שדה ממוצע P_{AV}

$$\mathcal{H}^{MF}_{E=0} = -4U_0 P_{av}\frac{P_i}{P}$$

ונקבל self-consistent

$$P_{av} = \frac{+pe^{\beta 4U_0\frac{P_{av}}{P}} - pe^{-\beta 4U_0\frac{P_{av}}{P}}}{e^{\beta U_0\cdots}+e^{-\beta U_0\cdots}} = p\tanh\left(\beta 4U_0\frac{P_{av}}{P}\right)$$

וככה, למצוא T_c נדרוש פתרון לפי הנגזרת



$$x = \frac{P_{av}}{P}$$

$$\frac{\partial\tanh(4U_0\beta x)}{\partial x} = \frac{\partial x}{\partial x} = 1$$

$$\downarrow$$

$$4U_0\beta_c = 1 \to \boxed{kT_c = 4U_0}$$

(b) נפתח בטיילור לסדר ראשון כאשר $T>T_c$

$$P_A^0 = P_B^0 = 0$$

$$P_A = p\tanh\frac{\beta}{P}\left(2U_0P_A - 2U_0P_B + Ep^2\right)$$

$$P_B = p\tanh\frac{\beta}{P}\left(2U_0P_B - 2U_0P_A + Ep^2\right)$$

נשתמש ב-

$$\tanh(f(E)) \approx \tanh(f(E=0)) + \frac{\partial\tanh(f(E))}{\partial E}E$$

$$\frac{P_A}{P} \approx \underbrace{\tanh\left(2U_0\frac{P_A^0}{P} - 2U_0\frac{P_B^0}{P}\right)}_{\frac{P_A^0}{P}} + \frac{1}{\cosh^2(\underbrace{2U_0\frac{P_A^0}{P} - 2U_0\frac{P_B^0}{P}}_{=0})}\cdot\beta PE$$

$$\frac{P_B}{P} \approx \frac{P_B^0}{P} + \beta PE$$

$$P = \frac{N}{2}(P_A + P_B) = \frac{N}{2}\left(P_A^0 + P_B^0 + 2\beta P^2 E\right) = N\beta p^2 E$$

$$\chi = \frac{\partial P}{\partial E}\bigg|_{E=0} = \frac{Np^2}{kT}$$