C03 (HW 2008 7.4)

נשים לב ש- $J<0$ במקרה האנטיפרומגנטי, עבור הביטוי

Pathria (11.5.10) $\rightarrow$

נגדיר

$$L_A = \frac{N_{A+}-N_{A-}}{N_A} = \frac{M_A}{\mu N_A}$$

ואז

$$L_A = \tanh\left(\frac{-qJL_B+\mu H}{kT}\right)$$

בשדה אפס

$$L_{A0} = \tanh\left(\frac{-qJL_{B0}}{kT}\right) = \tanh\left(\frac{qJL_{A0}}{kT}\right)$$

$(L_{A0}=-L_{B0})$

הנקודה הקריטית כשהשיפועים זהים ב- $L_{A0}\to 0$

$$1 = \frac{qJ/kT_c}{ch^2(1)} \Rightarrow qJ = kT_c$$

מכאן

$$L_A = \tanh\left(-\frac{T_c}{T}L_B + \frac{\mu H}{kT}\right)$$

$$L_B = \tanh\left(-\frac{T_c}{T}L_A + \frac{\mu H}{kT}\right)$$

בפרט

$$L_{A0} = \tanh\left(-\frac{T_c}{T}L_{B0}\right) = \tanh\left(+\frac{T_c}{T}L_{A0}\right)$$

$$\approx \frac{T_c}{T}L_{A0} - \frac{1}{3}\left(\frac{T_c}{T}\right)^3 L_{A0}^3$$

מתחת לנקודה הקריטית, $T<T_c$, $L_{A0}>0$ ואז ניתן לצמצם

$$\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 L_{A0}^2 = 3\left(1-\frac{T}{T_c}\right)$$

הביטוי הזה לא יעזור לנו
בגלל ... אלא בזה

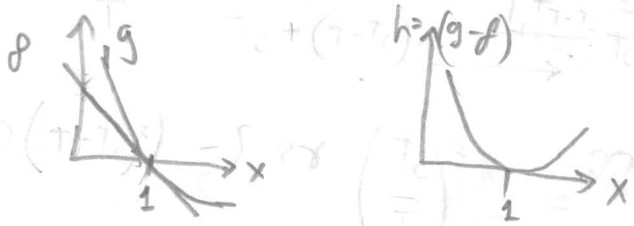
$$\frac{T_c}{T}\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 L_{A0}^2 = \boxed{3\left(\frac{T_c}{T}-1\right) \overset{?}{=} \left(\frac{T_c}{T}\right)^2 L_{A0}^2} \quad (*)$$

ולכן, כדי שזה יקרה צריך $\frac{T_c}{T} \approx 1$

אבל זה נכון ליד הנקודה הקריטית

נגדיר $x = \frac{T}{T_c}$

$f = 1 - \frac{T}{T_c} = 1 - x \; ; \; g = \frac{T_c}{T} - 1 = \frac{1}{x} - 1$



$h = g - f = x + \frac{1}{x} - 2$

נגדיר נוספת $y = x - 1$

סביב $y = 0$

נקבל

$$\left(\frac{T_c}{T} - 1\right) - \left(1 - \frac{T}{T_c}\right) = \left(\frac{T}{T_c} - 1\right)^2 - \left(\frac{T}{T_c} - 1\right)^3 + \dots$$

מכאן שההפרש בין הביטויים קטן מהביטויים עצמם בקרבת T_c

כעת נתחיל ב

$$L_A = L_{A0} + \delta L_A$$

$$L_B = L_{B0} + \delta L_B = -L_{A0} + \delta L_B$$

$$\rightarrow L = L_A + L_B = \delta L_A + \delta L_B$$

כיצד נמצא δL_A, δL_B?

$$\tanh(x) = \tanh(x_0 + \delta x) \approx \tanh(x_0) + \frac{\delta x}{\cosh^2(x_0)}$$

מכאן

$$L_A = \tanh\left(\frac{-T_c}{T} L_B + \beta\mu H\right) \approx \underbrace{\tanh\left(\frac{-T_c}{T} L_{B0}\right)}_{L_{A0}} + \underbrace{\frac{\frac{-T_c}{T}\delta L_B + \beta\mu H}{\cosh^2\left(\frac{-T_c}{T} L_{B0}\right)}}_{\delta L_A}$$

בצורה דומה עבור L_B, ומכיוון ש- cosh סימטרי נקבל

$$\boxed{L = \delta L_A + \delta L_B = \frac{-\frac{T_c}{T} L + 2\beta\mu H}{\cosh^2\left(\frac{-T_c}{T} L_{B0}\right)}} \qquad (**)$$

$$x = \frac{\partial L}{\partial H}\Big|_{H\to 0} = \frac{\partial (M/\mu N)}{\partial H} = \frac{\chi}{\mu N}$$ כעת נגדיר

ונגזור את (*) לקבל

$$x = \frac{-\frac{T_c}{T}x + 2\beta\mu}{\cosh^2\left(-\frac{T_c}{T}L_{B0}\right)}$$

$$x\left(1 + \frac{T_c}{T}\cdot\frac{1}{ch^2}\right) = \frac{2\beta\mu}{ch^2} \rightarrow x = \frac{2\beta\mu}{ch^2 + \frac{T_c}{T}}$$

$ch^2 \equiv 1 \Leftarrow L_{B0} \equiv 0 \Leftarrow T > T_c$ מעל הנקודה הקריטית

לכן

$$x_{T>T_c} = \frac{2\beta\mu}{1+\frac{T_c}{T}} = \frac{2\mu}{T+T_c} = \frac{2\mu}{2T_c\left(1+\frac{T-T_c}{2T_c}\right)} \approx \frac{\mu}{T_c}\left(1 - \frac{T-T_c}{2T_c}\right)$$

$$\boxed{\frac{\partial x_{T>T_c}}{\partial T} = \frac{-\mu}{2T_c^2}}$$

$L_{B0} \neq 0 \quad T<T_c$ מתחת לנקודה הקריטית

$$\cosh^2(y) \approx \left(1+\tfrac{1}{2}y^2\right)^2 \approx 1+y^2$$

לכן

$$x = \frac{2\beta\mu}{1+\left(\frac{T_c}{T}L_{B0}\right)^2 + \frac{T_c}{T}}$$

$\left(\frac{T_c}{T}L_{B0}\right)^2 = 3\left(\frac{T_c}{T}-1\right)$ (*) אבל לפי

לכן

$$x_{T<T_c} = \frac{2\beta\mu}{1+3\left(\frac{T_c}{T}-1\right)+\frac{T_c}{T}} = \frac{2\mu}{T+3T_c-3T+T_c} = \frac{2\mu}{4T_c-2T}$$

$$= \frac{\mu}{2T_c-T} = \frac{\mu}{T_c\left(1+\frac{T_c-T}{T_c}\right)} \approx \frac{\mu}{T_c}\left(1+\frac{T-T_c}{T_c}\right) \rightarrow \boxed{\frac{\partial x_{T<T_c}}{\partial T} = \frac{\mu}{T_c^2}}$$