CO2 modified (HW 2008 ש.1)

$$\mathcal{H} = -J\sum_{\langle i,j\rangle} \bar{S}_i \bar{S}_j - \bar{h}\sum_i S_i$$

$[\bar{S}_i \equiv \cos\theta_i]$ ← Classical spins, γ neighbours

א) נבצע קירוב MF לא זהירות

$$\mathcal{H}^{MF} = -\frac{J\gamma}{2}\langle \bar{S}\rangle \sum_i \bar{S}_i - \bar{h}\sum_i \bar{S}_i$$

$$= -\left(J\gamma\bar{M} + \bar{h}\right)\sum_i \cos\theta_i$$

(נבלע את ה-2 ב-J)

$$h_{eff} = J\gamma\bar{M} + \bar{h}$$

למעשה, קיבלנו

$$\mathcal{H}^{MF} = \sum_i\left(-h_{eff}\cos\theta_i\right) + const$$

$$= \sum_i \mathcal{H}_i^{MF}$$

$\mathcal{H}^{MF}$ הוא סכום של $\mathcal{H}_i^{MF}$ בלתי תלויים:

קירוב MF הפך את הבעיה הרב חלקיקית לבעיה חד-חלקיקית (ללא אינטראקציה ישירה) !

ולכן $Z_N = (Z_1)^N$ (לא צריך $\frac{1}{N!}$ כי החלקיקים קבועים במקום)

מכאן

$$Z_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} e^{-\beta\mathcal{H}_1^{MF}}\, d(\cos\theta_1)\int_0^{2\pi} d\varphi$$

נרמול לא ממש משנה

$$= \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} e^{+\beta h_{eff}\cos\theta}\, d(\cos\theta)\int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{\sinh(\beta h_{eff})}{\beta h_{eff}}$$

ולכן

$$Z_N = (Z_1)^N = \left(\frac{\sinh(\beta h_{eff})}{\beta h_{eff}}\right)^N$$

ג) עליט למגנט:

$$M = \langle \cos\theta_i \rangle = \int_{-1}^{1} \cos\theta_i \cdot P(\theta_i)\, d(\cos\theta_i)$$

$$= \frac{1}{Z_1} \int \cos\theta_i \cdot e^{+\beta h_{eff} \cos\theta_i}\, d(\cos\theta_i) \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \frac{\partial \ln Z_1}{\partial(\beta h_{eff})} = \frac{\partial}{\partial x} \ln\left(\frac{\sinh(x)}{x}\right)$$

$$= \frac{x}{\sinh(x)} \cdot \left[\frac{\cosh(x)}{x} - \frac{\sinh(x)}{x^2}\right]$$

$$\boxed{M = \coth(\beta h_{eff}) - \frac{1}{\beta h_{eff}}}$$

ולספקה עצמי

$$M\Big|_{h\to 0} = M_0 = \coth(\beta J \gamma M_0) - \frac{1}{\beta J \gamma M_0}$$

קרוב לטמפרטורה הקריטית $M_0 \ll 1$ ולכן נפתח

$$\coth(x)\Big|_{x\ll 1} \approx \frac{1}{x} + \frac{x}{3} + O(x^3)$$

לכן

$$M_0 \approx \cancel{\frac{1}{\beta J \gamma M_0}} + \frac{\beta J \gamma M_0}{3} - \cancel{\frac{1}{\beta J \gamma M_0}}$$

מכאן

$$\boxed{k_B T_c = \frac{J\gamma}{3}} \leftarrow \frac{J\gamma}{3 k_B T_c} = 1$$

נבצע קירוב MF דנקירות, בשדה אפס

$$\mathcal{H}_{h=0} = -J\sum_{<ij>} \bar{S}_i \bar{S}_j$$

קירוב MF:

$$\bar{S}_i = \langle S_i\rangle + (\bar{S}_i - \langle S_i \rangle) = M + (S_i - M)$$

$$\bar{S}_i \cdot \bar{S}_j = -M^2 + S_i \bar{M}_j + S_j \bar{M}_i \quad + \text{fluctuations}$$

בסכום $\sum_{<ij>}$ ניתן להחליף $i \leftrightarrow j$ וסוכמים 2 זוגות לכן $\frac{\gamma}{2}$ פקטור

כמו כן, אין תלות במקום לכן $\bar{M}_i = \bar{M}_j$

$$\mathcal{H}^{MF}_{h=0} = \frac{J}{2} M^2 N\gamma - J\gamma \bar{M} \sum_i \bar{S}_i$$

שוב פסם, יש לנו $\mathcal{H}^{MF}$ של אינטראקציית שדה חד חלקיקית

ולכן

$$\begin{cases} Z_1 = \frac{1}{4\pi}\int_{-1}^{1} e^{\beta J\gamma M\cos\theta} d(\cos\theta)\, d\varphi \cdot e^{-\frac{\beta}{2}\gamma J M^2} \\ Z_N = (Z_1)^N \end{cases}$$

$$Z_1 = \frac{\sinh(\beta J\gamma M)}{\beta J\gamma M} \cdot e^{-\frac{1}{2}\beta J\gamma M^2}$$

$$F = -kT\ln Z = -k_B T N\left[\ln\frac{\sinh(\beta J\gamma M)}{\beta J\gamma M} - \frac{1}{2}\beta J\gamma M^2\right]$$

מינימום אנרגיה חופשית תתן M סדר ליתר

$$\frac{\partial F}{\partial M} = 0 \quad \rightarrow \quad \beta J\gamma M^* = \frac{\partial}{\partial M}\ln\left(\frac{\sinh(\beta J\gamma M)}{\beta J\gamma M}\right)$$

$$\beta J\gamma M^* = \frac{-1}{M^*} + \beta J\gamma \coth(\beta J\gamma M^*)$$

כמו בסעיף ג

ביטוי זהה לסעיף ג' $\rightarrow$

$$\boxed{M^* = \frac{-1}{\beta J\gamma M^*} + \coth(\beta J\gamma M^*)}$$

כי לא היינו עושים MF בנקודות לא היינו מקבלים תוצאה נכונה

(3)

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta} = -\frac{\partial T}{\partial \beta} \cdot \frac{\partial \ln Z}{\partial T} = kT^2 \frac{\partial \ln Z}{\partial T}$$

$$C_v = \frac{\partial U}{\partial T} = 2kT \frac{\partial \ln Z}{\partial T} + kT^2 \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}$$

$$-\frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = \frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(kT \ln Z\right) = \frac{\partial}{\partial T}\left(k \ln Z + kT \frac{\partial \ln Z}{\partial T}\right)$$

$$= 2k \frac{\partial \ln Z}{\partial T} + kT \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial T^2}$$

c $$C_v = -T \frac{\partial^2 F}{\partial T^2} = -T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{\partial F}{\partial M} \cdot \frac{\partial M}{\partial T}\right)$$ אכן

$$\frac{\partial M}{\partial T} \sim \frac{T_c/T^2}{2\sqrt{\frac{T_c}{T}-1}}$$ מקודם $M \sim \sqrt{\frac{T_c}{T}-1}$ ב- ונציב

$$\frac{\partial F}{\partial M} = -\frac{1}{M} + \underbrace{\beta \gamma J \coth\left(\beta \gamma J M\right)}_{} - \beta J \gamma M$$ [illegible]

c $$\cancel{\frac{1}{M}} + \frac{\beta^2 \gamma^2 J^2 M}{3}$$

$$\approx \left(3\frac{\beta^2 \gamma^2 J^2}{3^2} - \frac{3\beta J \gamma}{3}\right) M = \left(3\left(\frac{T_c}{T}\right)^2 - 3\frac{T_c}{T}\right) M \sim \left(\frac{T_c}{T} - 1\right) M$$

$$\sim \left(\frac{T_c}{T} - 1\right)^{3/2}$$

$$C_v \sim -T \frac{\partial}{\partial T}\left(\left(\frac{T_c}{T}-1\right)^{3/2} \cdot \frac{T_c/T^2}{\sqrt{\frac{T_c}{T}-1}}\right) \sim -T \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{T_c}{T}\left(T_c - T\right)\right)$$ אכן

$$\approx -T \frac{\partial}{\partial T}\left(T_c - T\right) \sim T$$

$C_v = 0$ כי $M \equiv 0$, $T > T_c$ ואילו, $C_v(T_c^-) \sim T_c = \text{const}$ נכון?