B03 (2008 S.2)

$\mathcal{E} = \alpha |p|^s$, d dimension

$$N = \sum_{\bar{p}} \frac{1}{\frac{1}{z} e^{\beta \mathcal{E}(p)} - 1} \sim \int \frac{d^d k}{\frac{1}{z} e^{\beta k^s} - 1}$$ (c)

ב- $z=1$ נתפס התכנסות עבור BEC

$$\sim \int \frac{k^{d-1}\,dk}{e^{\beta k^s} - 1} \underset{k \ll 1}{\approx} \int \frac{k^{d-1}\,dk}{\beta k^s} \sim \int k^{d-s-1}\,dk$$

$$\sim k^{d-s}\Big|_{k \to 0}$$

לא יתבדר כאשר $d > s$

כי חלקיקים קלסיים $s=2$ דורשים $d \geq 3$

$$\frac{PV}{kT} = \ln \mathcal{L} \sim \int \ln\left(\tfrac{1}{z} e^{\beta \varepsilon_k} - 1\right) k^{d-1}\,dk$$ ← (Pathria 7.1) (ב)

$x = \beta \varepsilon_k \sim \beta k^s$

$$\rightarrow \ln \mathcal{L} \sim \beta^{-\frac{d}{s}} \int \ln\left(\tfrac{1}{z} e^{x} - 1\right) x^{\frac{d-1}{s}}\,dx^{\frac{1}{s}}$$ נשים לב: אין תלות בטמפרטורה

$$E = -\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}}{\partial \beta}\right)_z = \frac{d}{s} \cdot \beta^{-\frac{d}{s}-1} \int \sim = \frac{d}{s} \cdot \frac{1}{\beta} \ln \mathcal{L}$$

$$\sim \frac{d}{s} \cdot kT \ln \mathcal{L} = \frac{d}{s} PV$$

$$\rightarrow \boxed{E = \frac{d}{s} PV} \Rightarrow \boxed{P = \frac{s}{d} \frac{E}{V}}$$

(א) $PV = NkT$ עבור $T \to \infty$ כי גז נהיה גז בולצמן (קלסי)

$$\rightarrow E = \frac{d}{s} PV = \frac{d}{s} NkT$$

$$\rightarrow \frac{\partial E}{\partial T} = \frac{d}{s} N k_B$$

(*) $\left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x_i} x_j \right\rangle = \delta_{ij} kT$ (classical equipartition)

$|p| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} p_i^2} \Leftrightarrow |p|^2 = \sum_{i=1}^{d} p_i^2$ בכל רכיב p מימדי d

$|p|^s = (|p|^2)^{s/2}$ $\quad \left\langle \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_i} p_i \right\rangle = \left\langle s\alpha (|p|^2)^{s/2-1} \cdot p_i^2 \right\rangle$

isotropic $= (p_x = p_y = p_z) = \left\langle \frac{s}{d} \mathcal{H} \right\rangle = kT \rightarrow \boxed{E = N \cdot \frac{d}{s} kT}$