מבוא לפיסיקה מודרנית

מרצה: דורון כהן
אוניברסיטת בן גוריון, המחלקה לפיסיקה

(סרטונים וחלק מהציורים נלקחו מהרשת)

מטרת הקורס

מטרת הקורס "מבוא לפיסיקה מודרנית" היא להשלים לבסס להעמיק ולהרחיב את הפרספקטיבה שיש לסטודנטים על הפיסיקה המודרנית. הקורס כולל גם נושאים "רגילים" שאמורים להיות מוצגים בלימודי בית ספר תיכון (גלים, דה ברולי, מבנה החומר), וגם נושאים מתקדמים יותר (ראו פרוט נושאים בהמשך). האתגר העיקרי הוא להסביר את רעיונות היסוד של המכניקה הקוונטית לתלמידים שיש להם השכלה תיכונית בפיסיקה, תוך המנעות משימוש בפורמליזם מתמטי כבד. זה כולל הבהרת מושגים בסיסיים, התיחסות לניסויים מחשבתיים, וניתוח "פראדוקסים". הפוטנציאל היישומי יודגם לא רק באופן המסורתי (האטום של בוהר) אלא גם בהקשרים פיקנטיים (הצפנה קוונטית, מיחשוב קוונטי). מבחינת רמת שליטה של הסטודנטים בחומר, היעד הוא הבנה ביקורתית ברמה "פסיבית" . המרצה מנסה להימנע ממתכונת של הרצאות פופולריות שטחיות שמבוססות על הצגה לא ביקורתית של החומר ברמת "טריוויה" . מאידך אין תירגולים: הקורס לא מחליף את קורסי הליבה שבהם נדרשת שליטה בחומר ברמה "אקטיבית" .

הסטודנטים שלקחו את הקורס בשנת 2011 סיכמו את ההרצאות, ונושאים מעניינים נוספים שלא נכללו בשל מגבלות זמן. הקישורים זמינים באתר הקורס. לא כל הסיכומים באותה רמה, לא כולם נאמנים לחומר כפי שהוצג בהרצאות, ובנוסף יש שגיאות. בהמשך עמוד זה מופיעות גרסאות מתוקנות של סיכומי ההרצאה, שנערכו על ידי המרצה.

נושאים עיקריים

- חלקיקים ואינטראקציות
- התאור המתמטי של גלים, ניסוי שני סדקים
- הגדרת המושגים מהירות, תנע, מסה
- ספין וקיטוב של אלקטרונים ופוטונים
- הצפנה קוונטית
- מצבים קוונטיים של מערכת פתוחה/סגורה
- מודל האטום של בוהר, ניסוי פרנק הרץ
- מצבים קוונטיים של אוסצילטור הרמוני
- קיבול חום וקרינת גוף שחור
- הפוטון כחלקיק - האפקט הפוטואלקטרי, פיזור קומפטון
- אבחנה בין פרמיונים ובוזונים
- האם העולם קלאסי - אינשטיין פודולסקי רוזן ואי השוויון של בל
- מדידה קוונטית, החתול של שרדינגר
- מיחשוב קוונטי
- דינמיקה קוונטית: מעבר מחסומים, מתכות, מוליכים למחצה, דיודות
- דינמיקה קוונטית: שדה מגנטי - כוח לורנץ ואפקט אהרונוב בוהם
- גרביטציה, משוואות אינשטיין וקוסמולוגיה

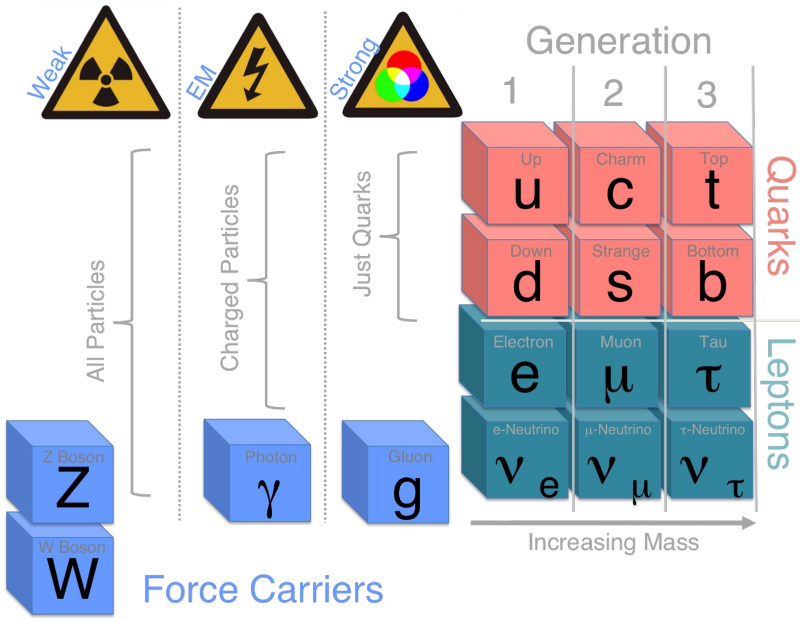
חלקיקים ואינטרקציות

forum link

מה יש ביקום?

על פי המודל הסטנדרטי מה שיש ביקום זה חלקיקים ושדות.
בין חלקיקי החומר לא פועלים כוחות ישירים.
האינטראקציה מתווכת על ידי שדות כיול (gauge fields).
בנוסף יש את האפקט שנקרא "גרביטציה".
מכאן שהיקום כולל את המרכיבים הבאים:

- קוורקים (מהם בנויים 100 הגרעינים של "היסודות")
- לפטונים (בפרט, אלקטרונים)
- שדות אינטרקציה (בפרט, השדה האלקטרומגנטי)
- גרביטציה (העקמומיות של המרחב)



מה זה חלקיק?

חלקיק אלמנטרי כגון אלקטרון הוא אוביקט שיש לו

- שלוש דרגות חופש של מיקום (x,y,z)
- דרגת חופש של קיטוב (spin)

הגרעינים הם לא חלקיקים אלמנטריים. הם מורכבים מפרוטונים וניוטרונים ולכן יש להם דרגות חופש "פנימיות" רבות. אפשר לסדר אותם על פי סדר משקלם ותכונותיהם הכימיות ב"טבלה מחזורית". עם התפתחות הפיזיקה המודרנית, התברר כי הפרוטונים והניוטרונים מורכבים מחלקיקים בסיסיים עוד יותר - הקווארקים. בהמשך, בעקבות חקר הקרינה הקוסמית ובאמצעות מאיצי חלקיקים, נתגלו חלקיקים מורכבים נוספים וקוטלגו לפי תכונותיהם (בריונים, מזונים).

קווארקים Quarks

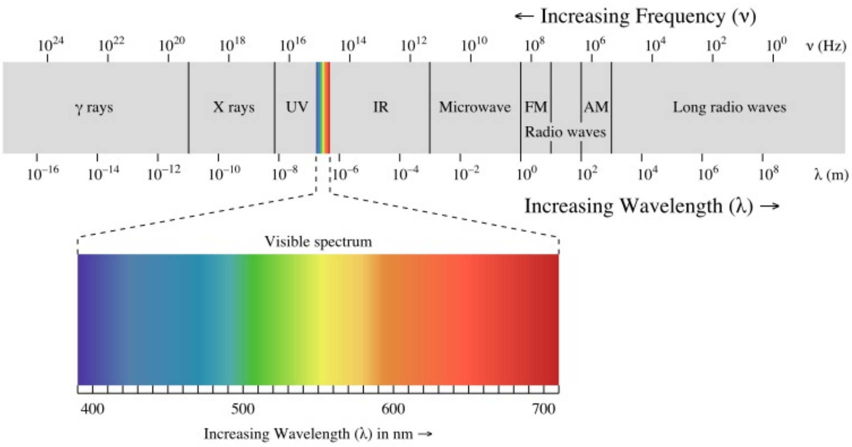
הפרוטונים, הנויטרונים, ומכאן כל 100~ הגרעינים שמוכרים לנו מורכבים מקווארקים. ישנם 3 צמדים ("דורות") של קווארקים. צמד הקוורקים הקלים ביותר הם: קווארק "מעלה" (u) שמטענו 2/3 ממטען הפרוטון, וקווארק "מטה" (d) שמטענו 1/3- ממטען הפרוטון. שלשות משני הסוגים הללו יוצרות חלקיקים שנקראים "בריונים," וזה כולל לדוגמה את הפרוטונים (uud) ואת הנייטרונים (udd). לכל קווארק יש גם אנטי-קווארק עם מטען הפוך, ובהתאם יש גם אנטי-פרוטונים ואנטי-נויטרונים. צרוף של קווארק ואנטי קווארק נקרא מזון, לדוגמה שלושת הפיונים מתקבלים מתוך הצרופים ud,uu,dd,du.

לפטונים Leptons

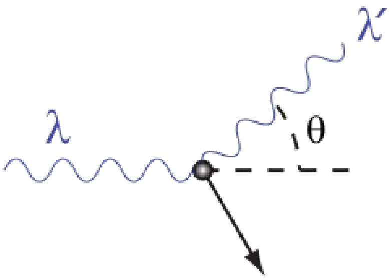
מקור השם הוא, במילה היוונית "לפטוס", שפירושה "קל". הלפטון המוכר ביותר הוא האלקטרון (לפטון מהדור הראשון). לפטונים נוספים הם המיואון והטאו. במקביל קיימים שלושה סוגי ניטרינויים. הלפטונים הם בעלי מטען שלם (-1 או 0 בהתאמה). לכל לפטון יש גם אנטי-לפטון עם מטען הפוך: בפרט הפוזיטרון הוא כמו אלקטרון אבל עם מטען חיובי.

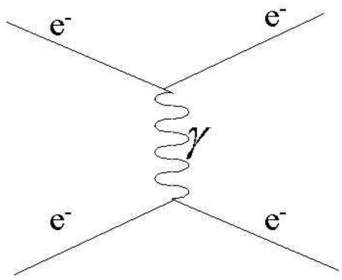
שדות האינטראקציה

בין חלקיק החומר לא פועלים כחות ישירים. האינטראקציה מתווכת על ידי שדות כיול (gauge fields). המוכר ביותר הוא השדה האלקטרומגנטי שאת ספקטרום העירורים שלו ממחיש הציור להלן. כמו כן יש את "הכח החזק" שמדביק את הקוורקים בתוך הגרעין. תיאוריית המודל הסטנדרטי כוללת אתהקוורקים ואת שדות הכיול. הגרוויטציה נשארת מחוץ לתמונה.



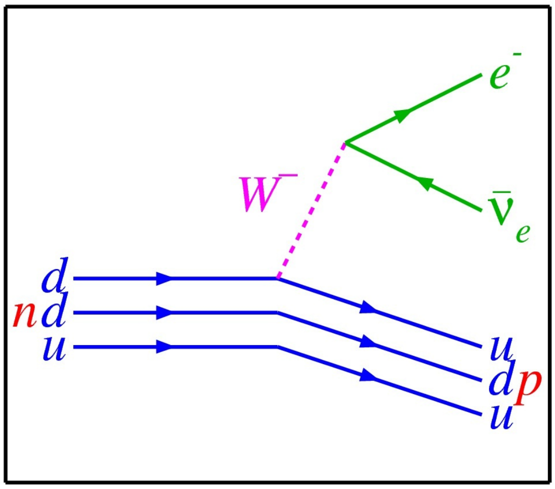
הפורמאליזם המתמטי של המכניקה הקוונטית, המאפשר את תיאור החלקיקים ושדות הכיול המופיעים במודל הסטנדרטי, נקרא quantum field theory (QFT). הדוגמה הפשוטה ביותר היא quantum electrodynamics (QED)- תורת השדה האלקטרומגנטי. תורת השדה של הכוחות החזקים נקראת quantum chromodynamics (QCD). בתיאור הקוונטי ניתן לראות את העירורים של שדות הכיול כחלקיקים (פוטונים, גלואונים), אשר יוצרים אינטראקציה עם חלקיקי החומר (קווארקים ולפטונים). למשל השדה האלקטרומגנטי כולל פוטונים חסרי מסה שיכולים להבלע ולהפלט ע"י חלקיקים טעונים. הציורים להלן ממחישים תהליך פיזור של פוטון על ידי אלקטרון (קומפטון), ותהליך שבו שני אלקטרונים משפיעים אחד על השני בתיווך השדה האלקטרומגנטי.





הכח החלש, חלקיקי היגס

בתהליכים רדיואקטיביים גרעין יכול להפוך להיות גרעין אחר על ידי שיחרור אלקטרון. זה נקרא התפרקות בטא. הדוגמה הפשוטה ביותר היא נויטרון שהופך להיות פרוטון (ראה ציור). משיקולי שימור אנרגיה הסיקו שבנוסף לאלקטרון משתחרר בתהליך כזה גם חלקיק נוסף חסר מטען - הניטרינו. במסגרת המודל הסטנדרטי השדה החלש W אחראי לתהליך. השדה הזה, בניגוד לשדה האלקטרומגנטי, הוא בעל מסה. על מנת להסביר איך שדה-כיול יכול להיות בעל מסה, הוצע מנגנון היגס של "שבירת סימטריה". בהמשך התגבשה ההכרה שהמנגנון של היגס יכול להסביר מדוע יש מסה לשאר החלקיקים במודל הסטנדרטי. בהנחה שתאורית "מנגנון היגס" נכונה, משתמע שאמור להיות סוג נוסף של חלקיקי אינטראקציה שלהם קראו "חלקיקי היגס", זאת בנוסף לחלקיקי האינטראקציה המוכרים W, Z, והפוטונים. גילוי חלקיקי היגס הוא האתגר העיקרי של CERN.



מצבי צבירה של החומר

החומר בצורות הצבירה השונות על פני כדור הארץ מורכב מכ-100 סוגי גרעינים שמאורגנים בדרכים שונות. ביחד עם האלקטרונים מצבי הצבירה השכיחים הם:

- אטומים (גזים אצילים)
- מולקולות (גז / נוזל / חומרים אורגניים)
- גבישים (מתכות, מלחים)
- פלסמה (חומר מיונן באטמוספירה)

בפיסיקה מודרנית מתיחסים למונח "מצב צבירה" בצורה יותר רחבה. לדוגמה, אפשר להגיד שהאטומים בסופר-נוזל או האלקטרונים בסופר-מוליך מצויים במצבי צבירה מיוחדים. גם כוכב נייטרונים הוא מצב צבירה מיוחד (אפשר לחשוב עליו כעל גרעין ענק שמורכב מנייטרונים ומוחזק על ידי גרביטציה).

מכניקה קלאסית

- המכניקה הקלאסית מתארת את הדינמיקה של חלקיקים ושדות.
- תורת השדה האלקטרומגנטי ("משוואות מכסוול") היא חלק מהמכניקה הקלאסית.
- תורת הגרביטציה של אינשטיין ("יחסות כללית") היא חלק מהמכניקה הקלאסית.

לשדה האלקטרומגנטי יש בכל נקודה במרחב 6 רכיבים: שלושה רכיבים שנקראים שדה חשמלי ו-3 רכיבים שנקראים שדה מגנטי. משוואות התנועה של השדה, שקובעות כיצד השדה משתנה בזמן, נקראות משוואות מכסוול. הפתרון של משוואות מכסוול בואקום נקרא "גל אלקטרומגנטי". האור, גלי רדיו וכו"ב הם דוגמאות לגלים אלקטרומגנטיים בתדירויות שונות. לפי משוואות מכסוול האור נע "במהירות האור". השאלה שעמדה בפני לורנץ ואינשטיין היתה האם משוואות מכסוול נכונות בכל מערכת יחוס. במילים אחרות: האם מהירות האור זהה בכל מערכות הייחוס. הרעיון הזה היה בסתירה לעקרונות המכניקה של ניוטון שהתבססו על תפיסה גלילאית של המרחב.

- עקרונות תורת היחסות נותנים מסגרת למכניקה.
- המכניקה של ניוטון היא "יחסותית" במובן של גלילאי.
- המכניקה של אינשטיין היא "יחסותית" במובן של לורנץ.
- תורת השדה האלקטרומגנטי היא "יחסותית" במובן של לורנץ.

- את המכניקה הקלאסית החליפה המכניקה הקוונטית.
- הכנסת תורת הגרביטציה למסגרת המכניקה הקוונטית הוא עדיין עניין פתוח.

קישורים:

http://en.wikipedia.org/wiki/Quark
http://en.wikipedia.org/wiki/Hadron

http://en.wikipedia.org/wiki/Lepton
http://en.wikipedia.org/wiki/Standard_Model

התאור המתמטי של גלים

forum link

מספרים קומפלקסים

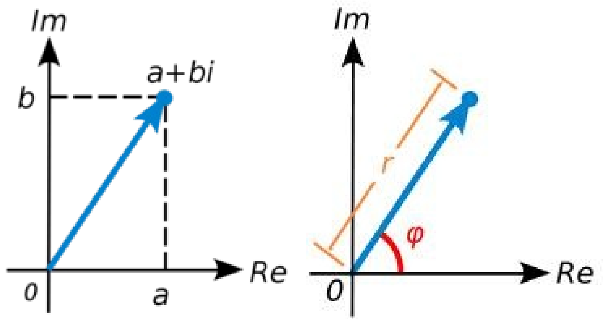
באנלוגיה למספרים "הממשיים" שמיצגים נקודות על "ציר המספרים", ניתן להתייחס אל מספר קומפלקסי כאל מייצג נקודה "במישור הקומפלקסי". אנו רושמים

$$z \;=\; (a,b) \;=\; a+ib \;=\; re^{i\phi}$$

צורת הכתיבה האחרונה קרויה "הצגה פולרית", באשר r הוא גודלו של z ובאשר ϕ היא הפאזה (זוית).

$$r \;\equiv\; |\,z\,| \;=\; \sqrt{a^2+b^2}$$

$$a \;=\; r\,\cos(\phi)$$
$$b \;=\; r\,\sin(\phi)$$



מתנד

אוסצילטור הרמוני הוא לדוגמה "חלקיק קשור לקפיץ". התנועה שלו היא מחזורית ומאופינת בתדירות זויתית ω ובאמפליטודה A. המצב של החלקיק בכל רגע ורגע מתואר על ידי המקום והמהירות שלו:

$$Q \;=\; A\,\cos(\phi_0-\omega t)$$
$$\dot{Q} \;=\; A\omega\,\sin(\phi_0-\omega t)$$

או לחילופין על ידי מספר קומפלקסי:

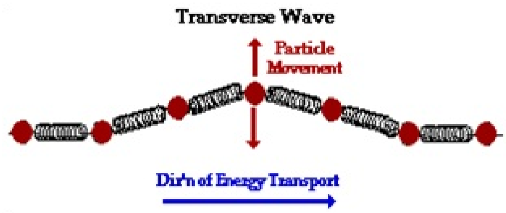
$$\psi \;=\; Q\,+\,i\frac{1}{\omega}\dot{Q} \;=\; Ae^{i\phi}$$

באשר A היא האמפליטודה, ובאשר ϕ היא הפאזה.
ההתפתחות של הפאזה בזמן היא

$$\phi(t) \;=\; \phi_0-\omega t$$

את התנועה של מתנד אפשר להמחיש כתנועה "בכיוון מחוגי השעון" על מעגל במישור הקומפלקסי. ההיטל של התנועה על הציר האופקי הוא ההעתק, וההיטל על הציר האנכי הוא המהירות.

גלים



אם המרחב כולל הרבה מתנדים, כל אחד יושב בנקודה אחרת, אז נרשום

$$\phi(x,t) = \phi_0(x) - \omega t$$

במקרה של גל מישורי יש הפרש פאזה קבוע בין התנודות בנקודות סמוכות במרחב ובהתאם נרשום

$$\phi(x,t) = kx - \omega t$$

$$\psi(x,t) \;=\; Ae^{i(kx-\omega t)}$$

ω היא התדירות הזוויתית ביחידות rad/sec
$f = \omega/2\pi$ היא התדירות ביחידות Hz
$T = 2\pi/\omega$ הוא זמן המחזור.

k הוא מספר הגל.
$\lambda = 2\pi/k$ הוא אורך הגל.

בדרך כלל אם יוצרים הפרעה עם אורך גל מסוים אז תהיה לה תדירות מסוימת.
הקשר בין התדירות ω לבין k נקרא יחס דיספרסיה. לגלי אור ולגלי קול יש יחס דיספרסיה לינארי:

$$\omega \;=\; c\;|k|$$

בסעיף הבא נראה שמקדם הפרופורציה c הוא המהירות של התקדמות הפרעה.

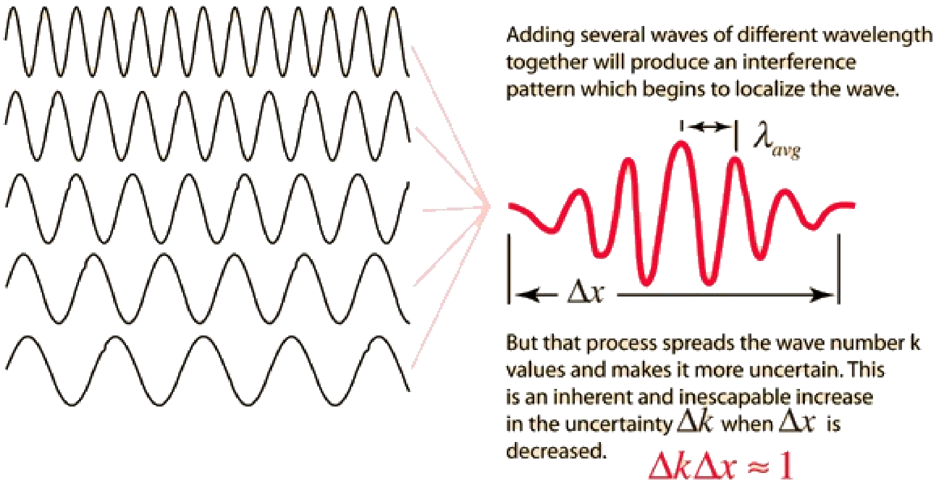
חבילת גלים (wave-packet)

כאשר פורטים על מיתר, לא יוצרים גל מישורי, אלא "חבילת גלים" ממוקמת מבחינה מרחבית.
ככל שהחבילה ממוקמת יותר (Δx קטן) , אורך הגל שלה הופך להיות פחות מוגדר (Δk גדול).
לאחר זמן מסוים החבילה "נמרחת" על כל המיתר (spreading of wave-packet).

$$\psi(x,t) \;=\; \sum_k A_k e^{i(kx-\omega_k t)}$$

עבור חבילת גלים עם יחס דיספרסיה לינארי אפשר לרשום את הביטוי לעיל בצורה

$$\psi(x,t) \;=\; f(x-ct)$$



יחס דיספרסיה לא לינארי

לא תמיד יחס הדיספרסיה הוא לינארי. נניח שיש לנו כדורים קשורים בקפיצים (ציור למעלה) ושבנוסף מעגנים את הכדורים לציר המרכזי באמצעות קפיצים נוספים. במקרה כזה הקשר בין תדירות התנודה לאורך הגל יהיה

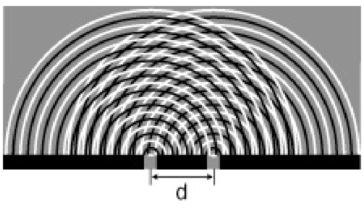
$$\omega \;=\; \sqrt{\omega_0^2 \,+\, (ck)^2}$$

אם אורך הגל ארוך מאוד אז אפשר להתעלם מהקפיצים שמחברים את הכדורים ומקבלים $\omega = \omega_0$. אם אורך הגל קצר מאוד אפשר להתעלם מהקפיצים המעגנים ומקבלים יחס דיספרסיה לינארי. את המהירות של חבילת גלים אפשר לחשב מתוך כך שמקרבים את התלות של התדירות במספר הגל על-ידי יחס לינארי. מכך משתמע שמהירות התנועה של החבילה תהיה

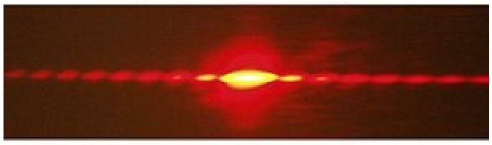
$$v \;=\; \frac{d\omega}{dk} \;\; [\text{calculated for the} \quad \text{average wavenumber}]$$

ניסוי שני סדקים

[forum link]



Pattern produced from a single slit.



Pattern produced from a double slit.

ניסוי שני סדקים מאפשר מדידה של אורך הגל

$$\lambda = \text{wavelength}$$

בתחילת המאה ה-19 ניסה הפיסיקאי תומאס יאנג להכריע האם האור הוא חלקיק או גל ע"י ניסוי התאבכות: ז"א העברת האור דרך "שני סדקים" או לחילופין אפשר להשתמש "שריג עקיפה". אם האור היה מורכב מחלקיקים היתה נוצרת מריחה אחידה של אור על המרקע. כיוון שהאור הוא תופעה גלית נוצרת תבנית מפוספסת בגין תופעת ההתאבכות (חיבור תנודות המגיעות ממקורות שונים):

$$\text{Intensity} \;=\; \left|Ae^{i\phi_1} + Ae^{i\phi_2}\right|^2 \;\propto\; (1+\cos(\phi_2-\phi_1)) \;\; |A|^2$$

באשר הפרש הפאזה בין שתי התנודות שמגיעות לנקודה על המסך הוא

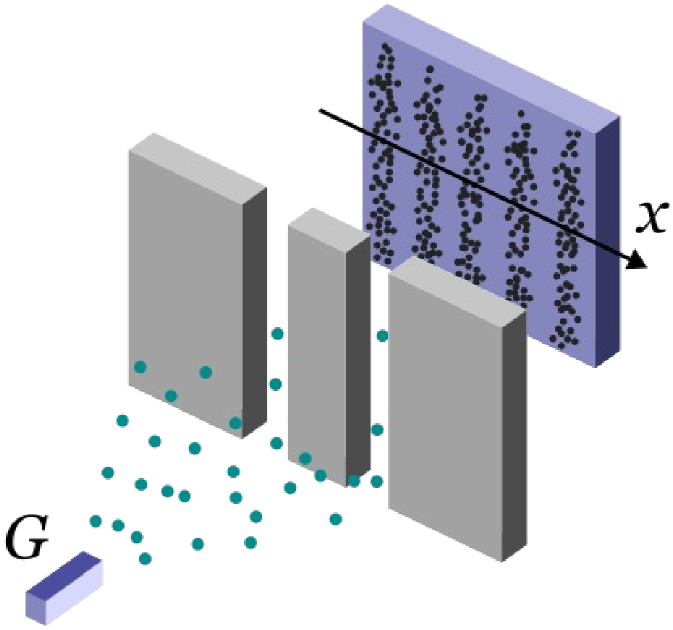
$$\phi_2 - \phi_1 \;\approx\; k\cdot d\cdot\theta$$

באשר:
λ - אורך הגל המוקרן
d - המרחק בין הסדקים

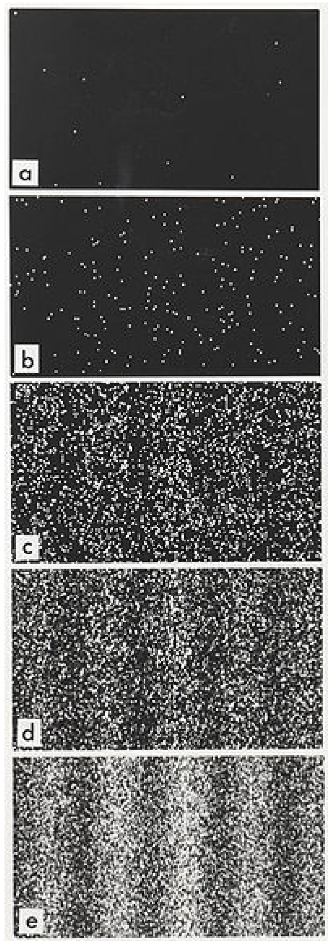
מכאן שהמרחק הזויתי בין פסי ההתאבכות נקבע לפי אורך הגל:

$$\Delta\theta \;=\; \frac{\lambda}{d}$$

במהלך המאה ה-20 הומצאה השפופרת הקתודית, מכשיר המאפשר להפיק אלומה של אלקטרונים. בניסוי הדומה לניסוי יאנג אפשר לבדוק את ההתנהגות של אלומת אלקטרונים. אם משגרים את האלקטרונים לעבר המסך דרך חריץ יחיד, התוצאה היא מריחה אחידה של האלקטרונים על גבי המסך. אם יש חריץ נוסף מתקבלת בניגוד לציפיה הקלאסית תבנית מפוספסת המעידה על התאבכות גלית, ואשר מאפשרת לקבוע את "אורך הגל" של האלומה. זה נקרא "אורך גל דה-ברולי".



התוצאה היא מפתיעה. על מנת לעמוד על משמעותה, ולודא שלא מדובר בתופעה קולקטיבית (דוגמת גלי ים), ניתן לשגר לעבר המרקע אלקטרון בודד בכל פעם. מקבלים את אותה התוצאה, בתנאי שצוברים מדגם מספיק גדול של אלקטרונים. שלב נוסף בניסוי הוא הרכבת גלאי על גבי אחד החריצים. בעזרת הגלאי מצליחים לראות דרך איזה חריץ עובר כל אחד מהאלקטרונים. במקרה כזה תופעת ההתאבכות נעלמת, והאלקטרונים מתנהגים באופן "קלאסי".



דרך אחת לנסח את המסקנה של הניסוי היא להגיד שלאלקטרון יש תכונה של דואליות: הוא מתנהג כמו חלקיק בזמן שצופים עליו, אך פוגע

במרקע ע"פ תופעת ההתאבכות הגלית אם אין מסתכלים עליו לאורך מסלולו. הפגיעות נעשות באופן סטטיסטי - יותר באיזורים המועדים להתאבכות הבונה מאשר באיזורים המועדים להתאבכות ההורסת.

- הקישור הבא הוא סרטון אנימציה של ניסוי שני סדקים לרבות הסבר מפורט של הניסוי: Two slit animation lecture
- הקישור הבא הוא הקלטה של ניסוי אמיתי: Double Slit Experiment Movie
- הקישור הבא הוא סירטון שמדגים את האפשרות לתת הסבר קלאסי לניסוי כזה Is This What Quantum Mechanics Looks Like

עקרון הסופרפוזיציה

האלקטרון, כמו גם הפוטון, וכמו כל חלקיק קוונטי, מתנהגים במהלך תנועתם באופן מוזר - הם כביכול(?) עוברים בשני מקומות בו זמנית כל עוד אין צופים בהם. זה הביא לניסוח הנחת היסוד הבאה של המכניקה הקוונטית: אם שני מצבים הם פיסיקליים אז גם מצב של "סופרפוזיציה" הוא פיסיקלי. במקרה שלפננו: "להיות בסדק הראשון" זה מצב פיסיקלי, "להיות בסדק השני" זה מצב פיסיקלי, ולכן גם "להיות בו זמנית בשני סדקים" זה גם מצב פיסיקלי. חלקיק יכול להמצא בעת ובעונה אחת במספר מקומות. במקרה כזה אנו אומרים שאין "ודאות" במיקום של החלקיק.

דטרמיניזם לעומת תאור הסתברותי

השאלה המתבקשת היא האם אולי ניתן לתת הסבר "קלאסי" לניסוי, מה שיאפשר באופן עקרוני לחזות איפה יפגע אלקטרון אינדיוידואלי במסך. נניח היפותתית שיש לנו שליטה מלאה באופן שבו אנו משגרים את האלקטרון, ושאנו יודעים עליו כל מה שאפשר לדעת. האם נוכל לקבוע בודאות לאיפה הוא יגיע? ניסוי שני סדקים לא נותן תשובה חד משמעית לשאלה זו. ספקולטיבית אפשר לכאורה להניח שתאוריה עתידית תוכל לקבוע באופן דטרמיניסטי את התוצאה של ניסוי מבוקר, כך שלא נצטרך להתפשר על תאור הסתברותי. בניסוחו של אינשטיין "אלוהים לא משחק בקוביות". בהמשך הקורס נראה שקביעתו של אינשטיין היתה מוטעית: הטבע כן משחק בקוביות. העולם שבו אנו חיים אינו דטרמיניסטי. עלינו להסתפק בתאור הסתברותי מסוג זה שנותנת המכניקה הקוונטית.

Einstein's Letter to Max Born (1926):

"You believe in a God who plays dice, and I in complete law and order in a world which objectively exists, and which I in a wildly speculative way, am trying to capture. I firmly believe, but I hope that someone will discover a more realistic way, or rather a more tangible basis than it has been my lot to find. Even the great initial success of the quantum theory does not make me believe in the fundamental dice game, although I am well aware that some of our younger colleagues interpret this as a consequence of senility."

Later paraphrased as "God does not play dice with the world".

הגדרת המושגים מהירות, תנע, מסה

forum link

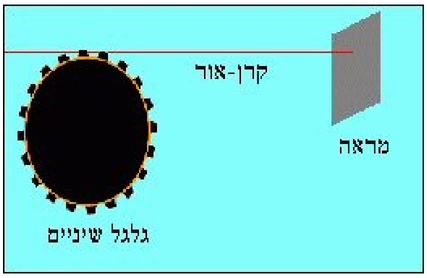
מהירות

מהירות הינה מידה לתיאור קצב תנועתו של גוף במרחב, המסומנת על ידי האות v בעלת כיוון וגודל. יחידות המהירות הן

$$[v] = \left[\frac{L}{T}\right] = \frac{meter}{second}$$

נניח שיש לנו אלומה של אלקטרונים. את מהירותם ניתן למדוד בשיטה של גלגל מסתובב, באמצעות מכשיר השולח אלומת אלקטרונים על קיר העוברת דרך שני דיסקים בעלי חור יחיד בכל אחד. על מנת לחשב את מהירות האלקטרונים נסובב את הדיסקים ולאט לאט נאיץ אחד מהם עד שנגיע למצב שבו האלומה עוברת באופן רציף ולפי המרחק של הדיסקים וקצב הסיבוב ניתן לקבוע מהי מהירות האלקטרונים.

קיימות גרסאות שונות של שיטה זו למדידת המהירות. בשנת 1849 פיסיקאי בשם פיזו (Fizeau) ביצע ניסוי למדידת מהירות האור. הוא שלח קרן אור שעברה בחריץ שבין שתי שיניים בגלגל מסתובב, והוחזרה על ידי מראות לאותו גלגל שיניים, לאחר שעברה מרחק מסוים. פיזו הצליח לסובב את הגלגל מספיק מהר, ולהגיע למהירות סיבוב מינמלית מסוימת, כך שהקרן המוחזרת נתקעה בשן של הגלגל, במקום לעבור שוב דרך אותו חריץ. מתוך הידיעה של מהירות סיבוב הגלגל ואורך המסלול (5 מייל) פיזו הצליח לחשב את מהירות האור שהיא בקרוב 300,000 ק"מ לשניה. כיום, במסגרת הסטנדרטיזציה של השיטה המטרית, מהירות האור הוגדרה להיות 299,792,458 מטרים לשניה.



תנע במכניקה קוונטית

האופי הגלי של חלקיקי החומר:

- בניסוי שני סדקים אלומה של אלקטרונים מתנהגת כמו אלומת גלים.
- אפשר למדוד את אורך הגל שמאפיין את האלומה
- אפשר לשגר את החלקיקים אחד אחד (כך שלא מדובר באפקט קולקטיבי)

$$p = \frac{2\pi}{\lambda} = \text{momentum} = \text{wavenumber}$$

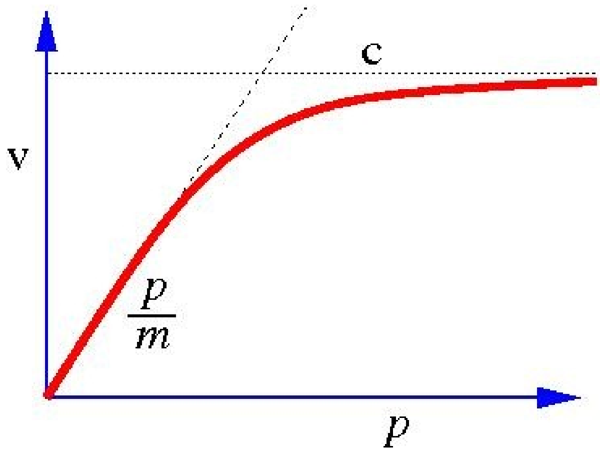
החוק השני של ניוטון: על ידי הפעלת "כוח" ניתן להגדיל את "התנע" של החלקיק.

$$\frac{dp}{dt} = \text{Force}$$

תנע גדול משמעו אורך גל קצר.

יחס הדיספרסיה

את הקשר בין מהירות לבין תנע ניתן למדוד באופן ניסיוני ולבטא אותו יחס הנקרא "יחס הדיספרסיה". לאלקטרונים ניתן לתת תנע גדול כרצוננו על ידי הפעלת כח חשמלי לפרק זמן מתאים. התנע שהאלקטרונים יקבלו יהיה שווה לכח המופעל כפול משך הפעלת הכח. התוצאה הנסיונית עבור המהירות נראית כמו בציור.



הקשר בין המהירות לבין התנע נקרא "יחס דיספרסיה".
במקרה הרלטיביסטי נוח לעבוד עם יחידות אורך שבהם $c = 1$ ולרשום

$$v = \frac{p}{\sqrt{m^2 + p^2}}$$

את יחס הדיספרסיה מקובל בצורה הבאה:

$$v = \frac{dE}{dp}$$

ביטוי זה מגדיר את המושג "אנרגיה" - זה הביטוי שממנו גוזרים את המהירות. בקורס המתקדם "מכניקה אנליטית" תגדירו את האנרגיה בתור "הערך של ההמילטוניאן". ההמילטוניאן היא פונקציה שממנה גוזרים את משוואות התנועה הקלאסיות. במקרה הכללי ההמילטוניאן כולל גם "פוטנציאל" שמשפיע על התנועה. אבל כאן אנו מתיחסים לחלקיק חופשי. נשים לב שבתוקף ההגדרה לעיל לאנרגיה יש יחידות של תדירות . הביטוי עבור "האנרגיה" שנותן את יחס הדיספרסיה הרלטיביסטי של חלקיק חופשי הוא:

$$E = \sqrt{(mc^2)^2 + (pc)^2}$$

כאן חזרנו לשיטת היחידות הרגילה, עם c מהירות האור.
במהירויות נמוכות ("לא יחסותיות"):

$$E \approx mc^2 + \frac{p^2}{2m}$$

האיבר הראשון נקרא "אנרגית מנוחה" והוא לא משפיע על יחס הדיספרסיה. לכן אפשר להשמיט אותו (הוא יבוא לכדי ביטוי רק בראקציות גרעיניות שבהם חלקיקים מתפרקים או מתמזגים). האיבר השני נקרא "אנרגיה קינטית". בקרוב הלא-רלטיביסטי יחס הדיספרסיה שנגזר ממנו הוא:

$$v \approx \frac{1}{m} p$$

מתוך הסתכלות בנוסחא של יחס הדיספרסיה אנו רואים שהיחידות של המסה הן:

$$[m] = \left[\frac{second}{meter^2}\right]$$

אם אנו רוצים לקבל את המסה ביחידות הקלאסיות של ק"ג עלינו להשתמש בנוסחת ההמרה הבאה:

$$m[kg] = \hbar m \left[\frac{second}{meter^2}\right] \qquad \left(\hbar = \frac{h}{2\pi}\right)$$

נדגיש שבמכניקה קוונטית המסה מוגדרת כפרמטר ביחס הדיספרסיה, ולא נדרש להגדיר עבורה יחידת מדידה נפרדת.

מסה במכניקה קלאסית

- ההגדרה של "מסה אינרציאלית" במכניקה קלאסית (באמצעות התנגשויות)
- ההגדרה של מסה בתור "אנרגית המנוחה" בתורת היחסות (פצצות אטום...)
- ההגדרה של "מסה גרביטציונית" בתורת הכבידה (באמצעות שקילה / מאזניים)

נתיחס להלן ביתר פרוט להגדרה הניוטונית של מסה אינרציאלית. המסה אינרציאלית המוגדרת על ידי תוצאת התנגשות של שני גופים. לשם כך נבחר גוף שרירותי במשקל 1kg כמסת הייחוס על מנת שניתן יהיה למצוא את מסת שאר הגופים ע"י ביצוע התנגשות בו.

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 u_1 + m_2 u_2$$

$$\frac{m_1}{m_2} = -\left(\frac{u_2 - v_2}{u_1 - v_1}\right)$$

להלן הדגמה נסיונית של "מדידת מסה" באמצעות התנגשות:

- התנגשות בין גופים בעלי מסות שוות
- התנגשות גוף בעל מסה קטנה בגוף בעל מסה גדולה
- התנגשות גוף בעל מסה גדולה בגוף בעל מסה קטנה

קישורים

תנע במכניקת קוונטים - http://en.wikipedia.org/wiki/Momentum#Momentum_in_quantum_mechanics
מידע מתומצת על מכניקה קוונטית - http://physics.bgu.ac.il/~dcohen/ARCHIVE/QMECH/qmech.html
סיכומי הרצאה במכניקה קוונטית - http://physics.bgu.ac.il/~dcohen/ARCHIVE/qmc_ARC.pdf
איך מדדו את מהירות האור - http://news.nana10.co.il/Article/?ArticleID=157635

חזרה על מכניקה קלאסית

את המצב של חלקיק מיצגים באמצעות נקודה (x,p) במה שנקרא "מרחב המצבים" או בשם המקובל יותר "מרחב הפאזות".

משוואות התנועה מתארות כיצד "הנקודה" זזה במרחב הפאזות:

יחס הדיספרסיה:
$$\dot{x} = \frac{dK(p)}{dp}$$
חוק שני של ניוטון
$$\dot{p} = F$$

באשר $K(p)$ היא פונקצית האנרגיה הקינטית שעליה למדנו בשעור הקודם.
את הכוח נהוג לרשום כנגזרת של פונקציה שנקראת "אנרגיה פוטנציאלית"

$$F = -\frac{V(x)}{dx}$$

לכן את משוואות התנועה אפשר לרושם כדלהן:

יחס הדיספרסיה:
$$\dot{x} = \frac{dK(p)}{dp}$$
חוק שני של ניוטון
$$\dot{p} = -\frac{dV(x)}{dx}$$

מגדירים את "האנרגיה הכוללת" של החלקיק באמצעות הביטוי

$$E = K(p) + V(x)$$

אפשר להראות שהגודל הזה "נשמר", זה אומר נשאר קבוע. קביעה זו נכונה כל עוד התנועה מתוארת על ידי המשוואות לעיל, ז"א שאין הפרעות חיצוניות של הסביבה. במילים אחרות אנו מתיחסים כאן למערכת מבודדת שבה החלקיק נע תחת השפעה של פוטנציאל קבוע. יש מספר דוגמאות סטנדרטיות שכדאי להכיר:

- חלקיק קשור לקפיץ (אוסצילטור הרמוני)
- חלקיק בקופסא
- מטוטלת

- תנועה של כדור הארץ סביב השמש

במקרה של חלקיק קשור לקפיץ הכוח הוא

$$x = \text{displacement from equilibrium point}$$

$$F = -\alpha x$$

$$V(x) = \frac{1}{2}\alpha x^2$$

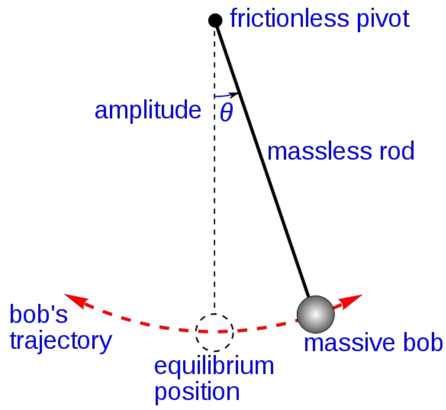
במקרה של מטוטלת הכוח הוא

$$x = \text{angle from the bottom equilibrium position}$$

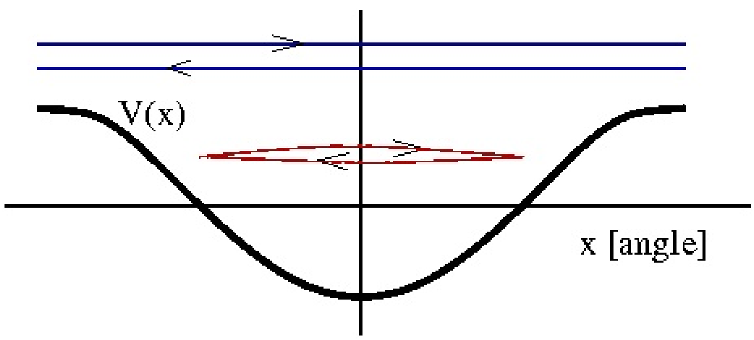
$$F = -\alpha \sin(x)$$

$$V(x) = -\alpha \cos(x)$$

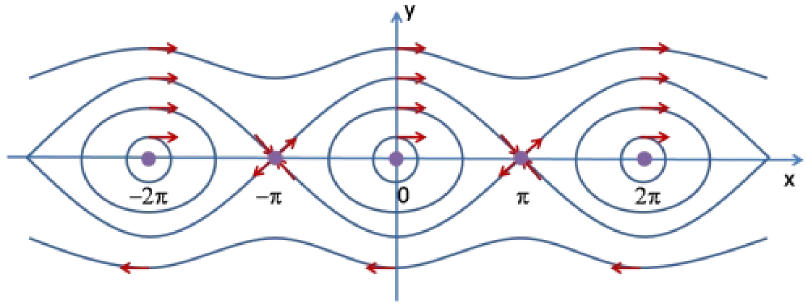
נשים לב שעבור תנודות קטנות המטוטלת היא כמו אוסצילטור הרמוני. אבל עם האנרגיה של המטוטלת מספיק גדול אז היא מבצעת סיבובים שלמים או בכיוון מחוגי השעון או נגד כיוון מחוגי השעון. במילים אחרות: במקרה של מטוטלת יש במרחב הפאזה שלושה אזורים שבכל אחד מהם יש תנועה מסוג אחר. הציורים להלן ממחישים את הדינמיקה.



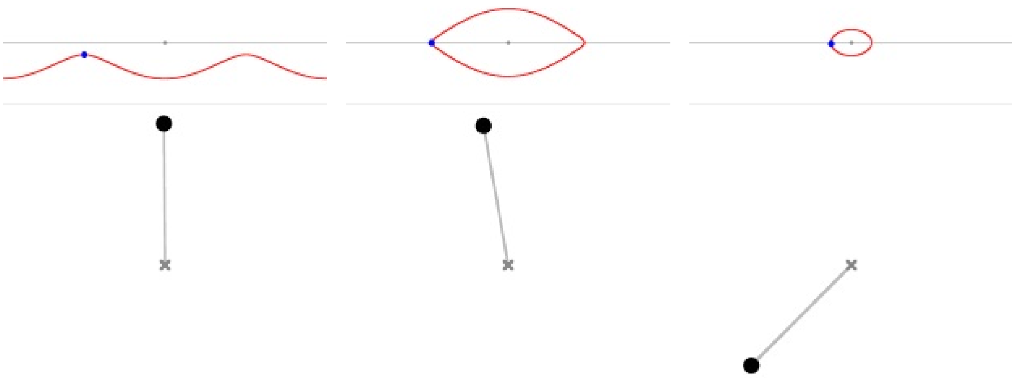
הפוטנציאל בתחום הזויתי $-\pi < x < +\pi$



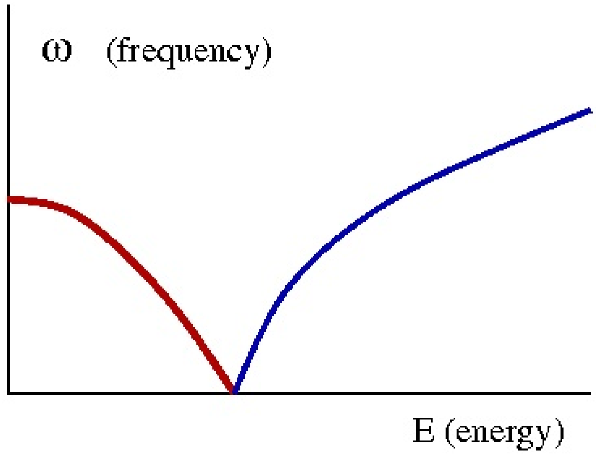
מרחב הפאזות הוא צילנדרי (ההמשכה המחזורית היא לצורך האילוסטרציה):



אילוסטרציות דינמיות של התנועה:



התלות של תדירות התנודה באנרגיה הכוללת מומחש בציור הבא:



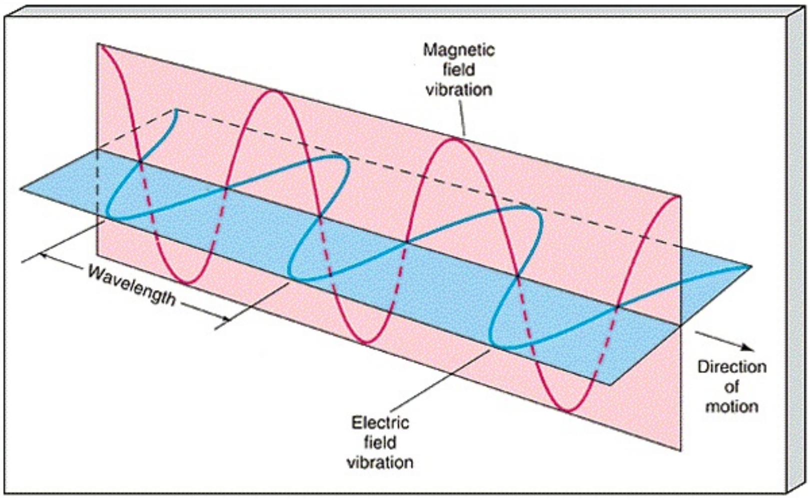
ספין וקיטוב של אלקטרונים ופוטונים

[forum link](#)
[forum link](#)

קיטוב של גל אלקטרומגנטי

ראשית, נתאר את קיטוב האור במסגרת התיאור הקלאסי שלו. על-פי התיאור הגלי, הקרינה האלקטרומגנטית הינה התקדמות של הפרעה מחזורית-הרמונית (תנודות) בשדה החשמלי והמגנטי. לצורך פישוט תיאור תופעת הקיטוב, נתייחס לגל האלקטרו-מגנטי כהתקדמות תנודות של שדה חשמלי.

נגדיר את כיוון "הקיטוב הלינארי" ככיוון התנודות של השדה החשמלי. כיוון הקיטוב הלינארי של האור תמיד מאונך לכיוון ההתקדמות של האלומה.



ניתן להעביר את האור דרך מקטב: הרכיב של השדה החשמלי שבכיוון המקטב יעבור, והרכיב המאונך "יאופס" (ראה ציור). כך נקבל גל אור ובו שדה חשמלי הנע בכיוון אחד בלבד (מקוטב). אם ננסה להעביר את האור דרך מקטב נוסף, מסובב ב-90 מעלות, תחסם תנועת הגל. באופן כללי יותר אם יש זוית בין שני המקטבים אז עצמת האלומה תונחת על פי הנוסחא הבאה:

$$\text{Intensity}(\theta' \mid \theta) \;=\; \mid \text{transmitted electric field} \mid^2 \;\;\propto\;\; \mid \cos(\theta' - \theta)|^2$$

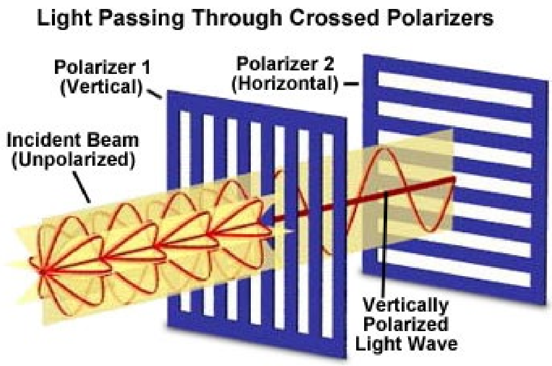


Figure 1

פרטים נוספים על תופעת קיטוב האור: polarization.html

קיטוב של פוטונים

אם נאיר מסך, נוכל לגלות בניסוי כי האור מגיע בקוונטות (מנות) קטנות, כך שאם נחבר רמקול קטן למסך נוכל לשמוע "טיק טיק טיק". כלומר, נקבל פגיעות קצובות במקום בו היינו מצפים לפגיעה גלית רציפה במסך. אותן קוונטות נקראות פוטונים. מכאן נובע שאפשר להתייחס אל האור כאל אלומה של חלקיקים. בהתאם נשתמש בשפה הבאה כדי לתאר את הקיטוב של הפוטונים שמהם מורכבת האלומה:

פוטון מקוטב לינארית בכיוון ציר X $|\leftrightarrow\rangle$
פוטון מקוטב לינארית בכיוון ציר Y $|\updownarrow\rangle$

פוטון מקוטב לינארית בכיוון כלשהו $|\theta\rangle = \cos\theta\, |\leftrightarrow\rangle + \sin\theta\, |\updownarrow\rangle$

מצבי הקיטוב האורתוגונליים הם 90^o

אוסף מצבי הקיטוב של פוטון מהווה מרחב ליניארי דו-מימדי

בקונטקסט הקוונטי אנו נאלצים להסביר את תופעת הקיטוב תוך שימוש בשפה הסתברותית: ככל שהזווית של הפוטון (השדה החשמלי) קרובה יותר לזווית המקטב, כך גדל הסיכוי של הפוטון לעבור את המקטב. בהתיחס לסופרפוזיציה הרשומה לעיל ההסתברות למעבר דרך מקטב אופקי או אנכי היא:

$$\text{Probability}(\leftrightarrow|\ \theta)\ =\ |\cos\theta|^2$$

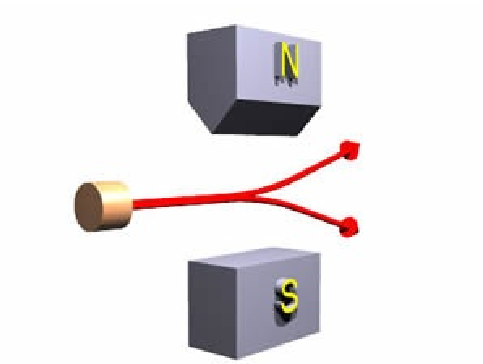
$$\text{Probability}(\updownarrow|\ \theta)\ =\ |\sin\theta|^2$$

ובאופן כללי

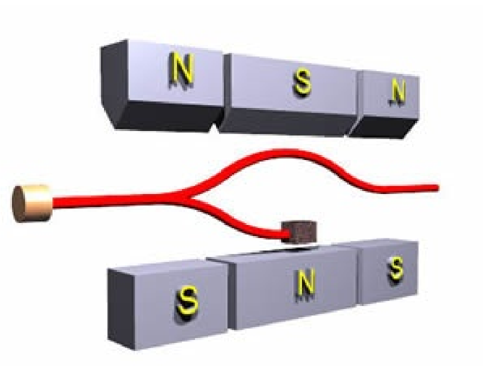
$$\text{Probability}(\theta'\ |\ \theta)\ =\ |\cos(\theta'-\theta)|^2$$

קיטוב של אלקטרון

קיטוב האלקטרון שונה מקיטוב הפוטון. כאשר מעבירים אלומת אלקטרונים לא מקוטבת דרך שדה מגנטי לא אחיד היא מתפצלת לשתי אלומות מקוטבות כמתואר בציור. זה נקרא ניסוי שטרן-גרלך (הניסוי המקורי בוצע עם אטומי כסף). אנו אומרים שהאלקטרונים של האלומה העליונה מקוטבים up, בעוד שהאלקטרונים של האלומה התחתונה מקוטבים down. כמובן שאשר לסובב את המתקן ולקבל אלומות עם קיטובים אחרים, לאו דוקא up או down.



אם אנו מאפשרים רק לאלומה אחת להמשיך, וחוסמים את האלומה השניה, זה אומר שיש לנו "מקטב"



אם נוסיף מקטב נוסף באותו כיוון כמו המקטב הראשון אז הם ימשיכו ללא הפרעה. אך אם נסובב את המקטב השני בזוית של 180 מעלות, כל החלקיקים יחסמו. אנו רואים שבניגוד לפוטונים, כיווני הקיטוב האורתוגונליים הם 180 מעלות ולא 90מעלות. מכאן שמדובר בסוג שונה של קיטוב. אם נציב את המקטב השני בכיוון ציר X אז 50% יעברו: זה אנלוגי לזוית של 45מעלות עם פוטונים. אפשר לשים בטור שלושה פילטרים ולהווכח שכללי הסופרפוזיציה הם אותו דבר כמו לגבי קיטוב של אור אבל עם "חצי זוית".

הדמיית ניסוי עם 3 מכשירי שטרן-גרלך (יש ללחוץ על הכפתור הירוק Run now בכדי להתחיל את ההדמיה)
http://phet.colorado.edu/en/simulation/stern-gerlach

ספין חצי

ניתן לומר שהקיטוב היא תכונה בסיסית של החלקיק, תכונה שנקראת "ספין". הספין של האלקטרון נקרא ספין 1/2, והספין של הפוטון נקרא ספין 1. נשתמש בשפה הבאה:

אלקטרון מקוטב בכיוון ציר Z $|\uparrow\rangle$
אלקטרון מקוטב בכיוון ציר Z- $|\downarrow\rangle$

אלקטרון מקוטב בכיוון כלשהו $|\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\,|\uparrow\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\,|\downarrow\rangle$

מצבי הקיטוב האורתוגונליים הם 180^o

אוסף מצבי הקיטוב של אלקטרון מהווה מרחב לינארי דו-מימדי

בהתיחס לסופרפוזיציה הרשומה לעיל ההסתברויות למעבר דרך מקטבים אנכיים היא:

$$\text{Probability}(\uparrow|\,\theta) \;=\; |\cos(\theta/2)|^2$$

$$\text{Probability}(\downarrow|\,\theta) \;=\; |\sin(\theta/2)|^2$$

ובאופן כללי

$$\text{Probability}(\theta' \mid \theta) \;=\; \left|\cos\left(\frac{\theta'-\theta}{2}\right)\right|^2$$

סוגים שונים של קיטוב

מבחינה היסטורית ההדגמה של קיטוב מסוג "ספין חצי" בוצעה לראשונה בניסוי שטרלן-גרלך. מטרת הניסוי היתה לבדוק את המומנט המגנטי של אטומי כסף. הניסוי נערך בעזרת מכשיר היורה אלומת אטומי כסף דרך מגנט שיוצר שדה לא אחיד. השדה הבלתי אחיד נוצר על ידי כך שקוטב אחד של "מגנט פרסה" רחב יותר מהקוטב השני שלו. האטומים עוברים במרחב שבין שני הקטבים. ההסחה שלהם פרופורציונלית למצב הקיטוב של המומנט המגנטי. לאחר מכן האטומים פגעו בגלאי ועל ידי כך נקבע ההתפלגות של מצב הקיטוב. תוצאת הניסוי היתה שההתפלגות התרכזה סביב שני ערכים שווים והפוכי סימן. מכאן אנו מסיקים שלחלקיקים יש "ספין 1/2".

תמונת תוצאות ניסוי שטרלן גרלך - פיצול האלומה
http://plato.stanford.edu/entries/physics-experiment/figure13.html

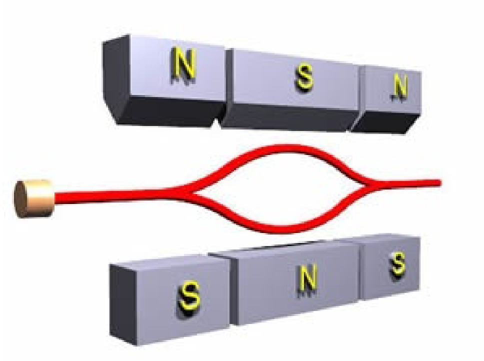
נסכם את המסקנה העיקרית של הדיון בנושא הקיטוב. את תופעת קיטוב האור ניתן להסביר כתופעה גלית. אך כאשר מתיחסים לאור כאל אלומה של חלקיקים (פוטונים) יש לייחס לכל פוטון דרגת חופש פנימית הנקראת "ספין 1". מצבי קיטוב של פוטון (במאונך לכיוון התנועה) הם אורתוגונליים אם הם נבדלים ב-90 מעלות. גם לאלקטרונים יש קיטוב, אבל מסוג "ספין 1/2". מצבי קיטוב של ספין 1/2 הם אורתוגונליים אם הם נבדלים ב-180 מעלות.

פוטון בניגוד לאלקטרון ניתן לקטב "קיטוב לינארי" (כמוסבר למעלה) רק במאונך לכיוון תנועתו: אם התנועה בכיוון Z אז הקיטוב יכול להיות במישור XY. זה קשור לכך שהפוטון נע במהירות האור, ואין מערכת יחוס שבה הוא שרוי במנוחה. פרט לקיטוב הלינארי (שהוסבר למעלה) הפוטון יכול להיות גם במצבי קיטוב אחרים שנקראים "בורגיים" או "מעגליים" או באופן כללי יותר "אליפטיים", אבל הגדרה מדויקת של מצבי קיטוב אלה דורשת הבנה מתמטית מלאה של המושג "ספין 1".

אנלוגיה לניסוי שני סדקים

נארגן את השדה המגנטי כך שהאלומה מתפצלת ולאחר מכן מתאחדת חזרה. אם כאשר החלקיק עובר דרך המכשיר הוא לא עושה אינטראקציה עם הסביבה (זה אומר אם לא "מסתכלים" עליו) אז הוא יוצא באותו מצב שבו הוא נכנס. לדוגמה, אם יש לנו אלומת חלקיקים עם מצב קיטוב $|\rightarrow\rangle$ אז ביציאה, לאחר פיצול והתאחדות כמתואר בציור, יהיה לחלקיקים אותו קיטוב אופקי. במקרה כזה אנו אומרים שהחלקיק עבר "בו זמנית" בשני המסלולים (העליון והתחתון) והתאבך ביציאה בחזרה למצב קיטוב אופקי. את המצב של החלקיק אפשר לכתוב כסופרפוזיציה:

$$|\rightarrow\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow\rangle$$



לעומת זאת אם "מסתכלים" על החלקיק כשהוא עובר דרך המכשיר, אז מה שמתקבל ביציאה זו תערובת של מצבי ספין. לדוגמה, אם יש לנו אלומת חלקיקים עם מצב קיטוב $|\rightarrow\rangle$ ואנו מודדים את הקיטוב בכיוון האנכי, אז ביציאה תהיה לנו תערובת של 50% מצב UP עם 50% מצב DOWN. במילים אחרות האלומה שתצא תהיה לא מקוטבת. את זה אפשר לודא על ידי כך ששמים מכשיר מדידה נוסף ורואים שאין קיטוב בשום כיוון מדידה.

אנו רואים שיש אנלוגיה בין ניסוי שטרן-גרלך לבין ניסוי שני סדקים. כאשר אין אינטרקציה החלקיק יכול להמצא בו זמנית בשני מקומות (בניסוי שני סדקים) או בשני מצבי קיטוב (בניסוי שטרן גרלך). אולם כאשר כן יש אינטרקציה (כאשר "מסתכלים" על החלקיק) הוא נאלץ לבחור במסלול יחיד. כדי להדגיש את האנלוגיה נרשום את מצב הקיטוב בצורה

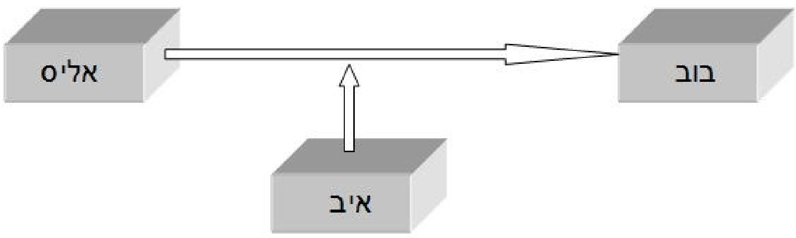
$$|\Psi\rangle = c_1\ |\ 1\rangle + c_2\ |\ 2\rangle$$

באשר להיות במצב "1" או במצב "2" יש לפרש על פי ההקשר. במקרה של ספין הכוונה לקיטוב UP או DOWN.
ההסתברות למדוד ספין $|\uparrow\rangle$ היא $|c_1|^2$ - אנלוגי למציאת החלקיק בסדק "1"
ההסתברות למדוד ספין $|\downarrow\rangle$ היא $|c_2|^2$ - אנלוגי למציאת החלקיק בסדק "2"

הצפנה קוונטית

forum link

הצפנה היא המרת מידע לפורמאט "לא קריא". הגישה המקובלת היא להשתמש בקוד (מספר רב ספרתי) לצורך ביצוע ההצפנה.
הצפנה קוונטית היא שימוש בתכונות הקיטוב של פוטונים או אלקטרונים על מנת ליצור קוד אשר משמש להצפנת מידע.



נניח שיש שני אנשים, אליס ובוב, שמעוניינים לתאם ביניהם קוד באמצעות הצפנה קוונטית ואדם שלישי המנסה לצותת - איב. ההסבר המובא בסיכום זה מתייחס לקיטוב אלקטרונים לפי ניסוי שטרלן גרלך. אלקטרון הוא בעל ספין 1/2 כאשר אפשרויות הקיטוב הן up/down כשהמקטב במצב אנכי, או left/right כשהמקטב במצב אופקי. נשתמש בהגדרות הבאות:

Measured state	Associated digit
$\vert\uparrow\rangle$	1
$\vert\downarrow\rangle$	0
$\vert\rightarrow\rangle$	1

$|\leftarrow\rangle$	0

פרוצדורת הכנת הקוד היא כדלקמן:

- מקור של אלקטרונים משגר אלקטרון
- אליס מודדת את הקיטוב של האלקטרון בכיוון אקראי (אנכי או אופקי)
- בוב מודד את הקיטוב של האלקטרון בכיוון אקראי (אנכי או אופקי)
- התהליך חוזר על עצמו מספר רב של פעמים (כמודגם בטבלא להלן)
- בסוף שומרים רק את התוצאות שמתיחסות למדידות שבוצעו באותו כיוון
- הקוד מתקבל (כמודגם בטבלא להלן)

נשים לב שכאשר המכשירים מוצבים באותו כיוון יש קורלציה מלאה בין מה שאליס ובוב מודדים. לעומת זאת כאשר מכשירי המדידה לא באותו כיוון אין קורלציה. ראוי להדגיש שבשלב האחרון של הפרוצדורה נדרשת תקשורת טלפונית בלתי מוצפנת על מנת שאליס ובוב יוכלו לבדוק (בדיעבד) באילו מחזורי מדידה המכשירים שלהם היו מוצבים באותו כיוון (אנכי או אפקי). מאידך, אליס ובוב מקפידים לא לספר מה היו התוצאות של המדידות (אפס או אחד), כך שהמידע הטלפוני לא יכול לעזור לאיב: רק אליס ובוב יודעים מה הקוד שהתקבל.

Alice measures	Bob measures	Generated Code
$|\uparrow\rangle$	$|\uparrow\rangle$	1
$|\uparrow\rangle$	$|\downarrow\rangle$	impossible event
$|\uparrow\rangle$	$|\rightarrow\rangle$	-
$|\rightarrow\rangle$	$|\rightarrow\rangle$	1
$|\downarrow\rangle$	$|\downarrow\rangle$	0
$|\downarrow\rangle$	$|\leftarrow\rangle$	-
$|\leftarrow\rangle$	$|\leftarrow\rangle$	0
$|\downarrow\rangle$	$|\downarrow\rangle$	0
$|\rightarrow\rangle$	$|\downarrow\rangle$	-
$|\rightarrow\rangle$	$|\rightarrow\rangle$	1

נניח שאיב מעוניינת לעלות על השדר. איב תנסה לגלות את השדר שאליס שולחת לבוב על ידי הצבת מקטב בין אליס לבוב. הבעיה היא שהיא אינה יודעת באיזה כיוון לכוון אותו. בהכרח בחלק מן הפעמים היא תכוון אותו בכיוון "אורתוגונלי" לזה של בוס ואליס. זה יגרום לכך שבהסתברות מסוימת בוב ואליס לא ימדדו את אותו מצב קיטוב למרות שמצבי המקטבים שלהם אותו דבר. זה יגרום לכך שבוב ואליס לא יצליחו להחליף קוד. לחילופין בוב ואליס יכולים תוך כדי תיקשורת לבצע בדיקה מדגמית של שדרים על מנת לודא את "תקינות התקשורת".

הדגשים

חשוב להבין שבעת מדידת האלקטרון על ידי איב היא אינה יכולה לבצע מדידה ולשלוח "אלקטרון משוכפל" לבוב במטרה להסוות את הציתות. אי האפשרות לשכפל מצב קוונטי נקרא בספרות "no cloning theorem". פעולת השכפול אינה אפשרית כיוון שהיא אינה מקיימת את עקרון הסופרפוזיציה, שהוא העיקרון הבסיסי במכניקה הקוונטית שעליו מבוסס התאור הדינמי של התפתחות מצבים בזמן. אם איב הייתה מסוגלת ליצור שכפול של מצב החלקיק, ולשלוח אלקטרון משוכפל לבוב, זה היה עומד בסתירה לעקרונות תורת היחסות: היה משתמע מכך שאפשר להעביר אינפורמציה מעל מהירות האור. לדיון נוסף ראה הרצאה על הניסוי המחשבתי של אינשטיין-פודולסקי-רוזן.

בשיטה של הצפנה קוונטית הצופן מתקבל באופן אקראי, וההסתברות לעלות עליו היא אפסית (לא יותר טוב מניחוש). בפועל ההצפנה הקוונטית מיושמת באמצעות פוטונים ולא באמצעות אלקטרונים. המקטבים במקרה זה הם בזוויות 0 ו-45 במקום 0 ו-90.

מצבים קוונטיים של חלקיק במרחב

forum link

חלקיק במערכת שני אתרים

להיות באתר מספר אחד: $|1\rangle$

להיות באתר מספר שתיים: $|2\rangle$

מצב כללי: $|\Psi\rangle = \alpha\mid 1\rangle + \beta\mid 2\rangle$

האם מצב כללי הוא פיסיקלי?

תשובה: כן. אבל בניגוד לספין 1/2 כאן הטבע לא דמוקרטי. במקרה של ספין 1/2 מצב סופרפוזיציה של up עם down הוא פשוט מצב של קיטוב בכיוון כלשהו, ואין הוא שונה במהותו מכל מצב קיטוב אחר. לעומת זאת "להיות בשני אתרים בו זמנית" זה מצב שונה מהותית מבחינת אפשרות המדידה. אפשר בקלות למדוד "איפה החלקיק", קשה הרבה יותר לקבוע אם יש "סופרפוזיציה" מסוימת.

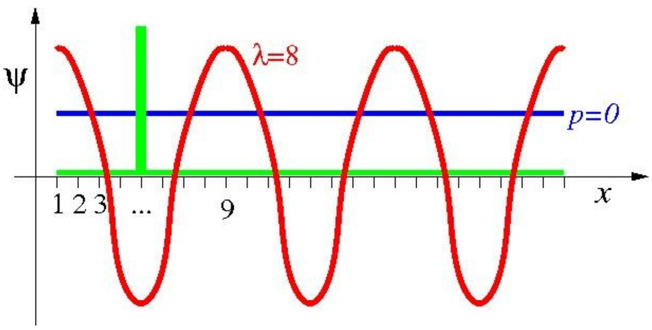
חלקיק במערכת N אתרים

להיות באתר מספר חמש: $|\Psi\rangle = \mid 5\rangle$

להיות עם תנע אפס: $|\Psi\rangle = \mid 1\rangle + \mid 2\rangle + \mid 3\rangle + \ldots + \mid N\rangle$

מצב כללי: $|\Psi\rangle = \psi_1\mid 1\rangle + \psi_2\mid 2\rangle + \psi_3\mid 3\rangle + \ldots$

אוסף המספרים $\psi(x)$ באשר $x = 1, 2, 3 \ldots$ נקרא "פונקצית גל"



האם מצב כללי הוא פיסיקלי?

תשובה: כן. אבל לא לכולם יש "פרשנות קלאסית" פשוטה. למצבי "מקום" יש פרשנות קלאסית פשוטה. גם למצבי "תנע" יש פרשנות קלאסית כיוון שאפשר אז ליחס לחלקיק מהירות מוגדרת. גם סופרפוזיציות פשוטות כגון "חבילת גלים" אפשר לפרש באופן קלאסי. אבל מצבים שבהם החלקיק נמצא (לדוגמה) במקומות מופרדים מבחינה מרחבית בעת ובעונה אחת, כמו בניסוי שני סדקים, הם בלתי אפשריים לאינטרפטציה קלאסית. על כל פנים, כל עוד מתיחסים למדידה מסוג מסוים, במקרה שלפננו מדידת מקום, תמיד יש את הפרשנות הסטטיסטית הבאה:

$$\text{Probability}(x\mid\psi) \quad = \quad \mid\psi(x)|^2$$

מצבים של חלקיק חופשי

חלקיק חופשי הוא חלקיק אשר תנועתו אינה מוגבל על ידי פוטנציאל. במערכת פתוחה אפשר להגדיר מצבי סופרפוזיציה שמרוחים על פני כל המרחב. מבחינה מתמטית נוח לחשוב על המרחב כעל רצף של תאים קטנים שבהם החלקיק יכול להימצא. בנוסף נוח להניח שהמרחב הוא בעל נפח סופי על ידי הגדרת "תנאי שפה מחזוריים" (בשפה המתמטית מרחב כזה נקראט "טורוס"). אוסף המצבים האפשריים של החלקיק הם כל מצבי המקום וכל הסופרפוזיציות שלהם. בפרט שימושי להגדיר את מצבי "התנע". מצב התנע הפשוט ביותר הוא מצב של תנע אפס:

$$|p{=}0\rangle \quad = \quad \mid 1\rangle + \mid 2\rangle + \mid 3\rangle + \ldots + \mid x\rangle + \ldots$$

באופן כללי יותר התנע יכול להיות שונה מאפס:

$$|p\rangle \;\; = \;\; e^{ip} \mid 1\rangle + e^{i2p} \mid 2\rangle + e^{i3p} \mid 3\rangle + \ldots + e^{ixp} \mid x\rangle + \ldots$$

החלקיק "מרוח" על פני כל המרחב: הוא מצוי בו זמנית בכל ה"תאים" במרחב.
בז'רגון המקובל אומרים שמצב החלקיק מתואר על ידי פונקצית הגל ורושמים את הסופרפוזיציה בצורה הבאה:

$$|p\rangle \;\; = \;\; \psi_1 \mid 1\rangle + \psi_2 \mid 2\rangle + \psi_3 \mid 3\rangle + \ldots + \psi_x \mid x\rangle + \ldots \;\; = \;\; \sum_x \psi_x \mid x\rangle$$

פונקצית הגל של חלקיק בעל תנע p היא

$$\Psi_x = e^{ipx}$$

באשר $x = 1, 2, 3, \ldots$

או בגבול הרצף נהוג לרשום זאת בצורה

$$\Psi(x) = e^{ipx}$$

באשר $x \in [-\infty, \infty]$

התנע של החלקיק מבטא את "אורך הגל"

$$p = 2\pi/\lambda$$

נורמליזציה ואי ודאות

פונקציית הגל צריכה להיות מנורמלת, על מנת שנוכל לתת לה אינטרפטציה הסתברותית. בהתאם:

$$\psi_x = \frac{1}{\sqrt{N}} e^{ipx}$$

המצב שבו החלקיק "מרוח" על פני כל המרחב הוא מלאכותי מבחינה מעשית. טיפוסית החלקיק יהיה מרוח באזור סופי במרחב שגודלו Δx. החלקיק לא יהיה במצב של תנע מוגדר היטב, אלא בסופרפוזיציה של מצבי תנע. התנע אינו בעל ערך ודאי, אלא עם תחום פיזור Δp. בהתאם מתקיים

$$\Delta p \Delta x \; > \; 1/2$$

אי שיוויון זה, שמבוסס על תכונות של התמרת פוריה, נקרא לעיתים "עקרון אי הודאות של הייזנברג". למעשה אי השיוויון של היזנברג הוא מקרה פרטי של עקרון כללי יותר. בניסוח יותר אבסטרקטי "עקרון אי הודאות" אומר שבלתי אפשרי ליצור מצב פיסיקלי שבו יש ודאות סטטיסטית לגבי כל מדידה אפשרית. זה נובע מהנחת היסוד העיקרית של המכניקה הקוונטית: סופרפוזיציה של מצבים פיסיקליים, גם היא מצב פיסיקלי. העקרון הכללי חל לגבי כל סוג של מערכת, גם לגבי מצבי קיטוב, וגם לגבי מצבים מרחביים.

מצבים קוונטיים של חלקיק קשור

forum link

האנרגיה של חלקיק קשור שמצוי במצב "סטציונרי" מקוונטטת (אנלוגיה: גל עומד במיתר).
לכן החלקיק יכול לבלוע או לפלוט אנרגיה רק במנות בדידות (ספקטרוסקופיה).
להלן ובהמשך נציג את הדוגמאות הבאות:

- חלקיק בקופסא ("בור פוטנציאל") $E_n = n^2, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$
- אלקטרון קשור באטום ("אטום המימן") $E_n = -\dfrac{1}{n^2} \quad n = 1, 2, 3, \ldots$

- אטום קשור במולקולה ("חלקיק קשור לקפיץ") $E_n = \omega n \quad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$

להלן נסביר כיצד מגיעים לתוצאות האלה, ומה המשמעות שלהם. בפרט נדגיש את התאימות של התוצאות לחישוב הקלאסי של תדירות התנועה.

חלקיק קלאסי בקופסא

נדון בחלקיק "בקופסא" שנע בתחום שמוגדר על ידי קירות בלתי חדירים. בעזרת מודל זה ניתן להדגים חלק מההבדלים הקיימים בין המכניקה הקלאסית למכניקה הקוונטית. הגרסא הפשוטה ביותר של בעית חלקיק בקופסא היא המקרה החד מימדי - החלקיק נע על קו ישר בין הקירות התוחמים אותו. את קירות הקופסה ניתן לתאר כאיזור במרחב שבו הפוטנציאל גדול מאוד, ואת פנים הקופסה כאיזור עם "פוטנציאל אפס" שבו לא פועלים כוחות כלל. בתוך הקופסה החלקיק יכול לנוע בצורה חופשית. תחילה נחשב את זמן המחזור של חלקיק בקופסה כפי שמחושב ע"י הפיזיקה הקלסית. אם הקופסא באורך L והחלקיק נע במהירות v אז זמן המחזור של תנודה הוא

$$\text{oscillation time} \;=\; \frac{2L}{v}$$

ולכן תדירות התנודות היא

$$\omega \;=\; \frac{2\pi}{\text{oscillation time}} \;=\; \frac{\pi}{L}v$$

הקוונטיזציה של האנרגיה

במכניקה קוונטית החלקיק מתואר באמצעות פונקצית גל. במקרה של חלקיק בקופסא יש אנלוגיה לבעיה של מיתר שרוטט בין שתי נקודות. במצב "סטציונרי" של "גל עומד" אורכי הגל הבאים בחשבון הם

$$\lambda_1 \;=\; 2L\,, \quad \lambda_2 \;=\; L\,, \quad \lambda_3 \;=\; \frac{2L}{3}\,, \quad \lambda_n \;=\; \frac{2L}{n}$$

לכן הערכים האפשריים של התנע הם

$$p_n \;=\; \frac{2\pi}{\lambda_n} \;=\; \frac{\pi}{L}n$$

זה אומר שהמהירות (בערכה המוחלט) היא

$$v_n \;=\; \frac{1}{m}p_n \;\propto\; n$$

האנרגיה הקינטית של החלקיק במצב כזה היא

$$E_n \;=\; \frac{1}{2m}p_n^2 \;=\; \frac{1}{2m}\left(\frac{\pi}{L}n\right)^2$$

נשים לב שמצב של תנע אפס "בקופסא" אינו אפשרי כיוון שפונקצית הגל של מצב כזה לא מתאפסת בקצוות (ליד הקירות). מצב של תנע אפס כן אפשרי אם יש תנאי שפה מחזוריים (חלקיק על "טורוס").

החישוב הקוונטי של תדירות התנועה

נחשב את זמן התנודה של החלקיק מנקודת מבט קוונטית. לשם כך עלינו להגדיר את המושג "אנרגיה". כבר פגשנו את המושג הזה בהקשר של חלקיק חופשי. שם אמרנו שהאנרגיה היא ביטוי שממנו ניתן לגזור ביטוי עבור המהירות של החלקיק. זה למעשה מקרה פרטי של טענה כללית יותר: תדירות התנועה נקבעת על ידי הפרשי אנרגיות:

$$\omega \;=\; E_n - E_m$$

במקרה שלפננו

$$\omega = E_{n+1} - E_n = \frac{{p_{n+1}}^2}{2m} - \frac{{p_n}^2}{2m} = \frac{1}{m}(p_{n+1} - p_n)\left(\frac{p_n + p_{n+1}}{2}\right) = \frac{\pi}{L}v$$

זאת בהתאמה לציפיה הקלאסית. עם זאת נדגיש שבחישוב הקלאסי כל אנרגיה היא מותרת, ולכן כל תדירות היא אפשרית, בעוד שבחישוב הקוונטי רק אנרגיות מסוימות מותרות, ולכן רק תדירויות מסוימות הן אפשריות. נשים לב שלאנרגיות כשלעצמן אין חשיבות - רק להפרשי אנרגיות יש משמעות פיסיקלית.

מודל האטום של בוהר

[forum link]

מודל האטום של נילס בוהר הוצג ב-1913, בהמשך לעבודות של איינשטיין ופלאנק על הקרינה האלקטרומגנטית. מודל זה מהווה גרסא קוונטית פרימיטיבית של "המודל הפלנטארי" אשר פורסם על ידי רתרפורד בתחילת 1911. למודל הפלנטארי של רתרפורד היו מספר בעיות, העיקרית שבהן הייתה שהאלקטרונים הסובבים את הגרעין, ככל מטען מואץ, אמורים לפלוט קרינה אלקטרומגנטית (פוטונים) ואיבוד האנרגיה בדרך זו תגרום להם לנוע בספיראלה ולהתנגש בגרעין תוך זמן קצר. מודל האטום של בוהר נתן באור ליציבות של האטום, והסבר לנוסחת רידברג שמתארת את ספקטרום התגובה של האטום ("קווי בליעה / פליטה"). המודל נתן השראה לדה-ברולי לנסח ב-1924 את התזה שהתנועה של חלקיקים מאופינת ב"אורך גל". התזה של דה ברולי נתמכה על ידי ניסוי ההתאבכות שביצעו דויסון וגרמר ב-1927. התאור הקוונטי המודרני של אטום המימן מבוסס על משוואת שרדינגר שהוצעה ב-1926 על מנת לתאר את הדינמיקה "הגלית" של החלקיקים.

אנליזה קלאסית

נניח שהאלקטרון בעל מסה m נע במהירות v במסלול מעגלי בעל רדיוס r.
האלקטרון מוחזק במסלולו על ידי כוח הנובע מחוק קולון המהווה כוח צנטריפטלי.
להלן α מייצג את קבוע חוק קולון (כולל מטען האלקטרון).
החוק השני של ניוטון הוא:

$$m\frac{v^2}{r} = \frac{\alpha}{r^2}$$

מכאן נובע קשר בין הרדיוס למהירות של התנועה:

$$r = \frac{\alpha}{mv^2}$$

בהתאם האנרגיה הפוטנציאלית של האלקטרון היא:

$$V = -\frac{\alpha}{r} = -mv^2$$

מכאן האנרגיה הכוללת של האלקטרון היא:

$$E = \frac{p^2}{2m} + V = \frac{1}{2}mv^2 - mv^2 = -\frac{1}{2}mv^2$$

תנאי הקוונטיזציה

נדרוש שהיקף המסלול יהיה שווה לאורך הגל שלו כפול מספר שלם:

$$2\pi r = n\lambda \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

נזכור שאורך הגל על פי דה-ברולי נקבע על ידי המהירות:

$$\lambda = \frac{2\pi}{mv}$$

נקבל את תנאי הקוונטיזציה

$$mvr = n \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

לעיתים מנסחים את תנאי זה בצורה הבאה: $L = integer$

פרשנות זו מאוד פופלרית בספרי לימוד אלמנטריים, אבל בפרספקטיבה היסטורית ספק אם יש לה משמעות. לדוגמה, מצב היסוד הוא למעשה בעל תנע זויתי אפס, בניגוד למה שמשתמע ממודל בוהר.

ספקטרום האנרגיה

מהאנליזה הקלאסית נבטא את רדיוס המסלול באמצעות המהירות, ונציב בתנאי הקוונטיזציה. נקבל שהמהירויות "המותרות" של האלקטרון הן:

$$v_n = \frac{\alpha}{n}$$

ולכן האנרגיות "המותרות" הן

$$E_n = -\frac{\alpha^2 m}{2n^2}$$

אם אנו עושים ספקטרוסקופיה אז מה שנראה זה הפרשי תדירויות. אם האלקטרון נמצא ברמה גבוהה אז בקרוב

$$\omega = E_{n+1} - E_n \approx \frac{\alpha^2 m}{n^3}$$

מיד רואים שזה בהתאמה לפתרון הקלאסי:

$$\omega = \frac{v_n}{r_n} = \frac{1}{\alpha} m v_n^3$$

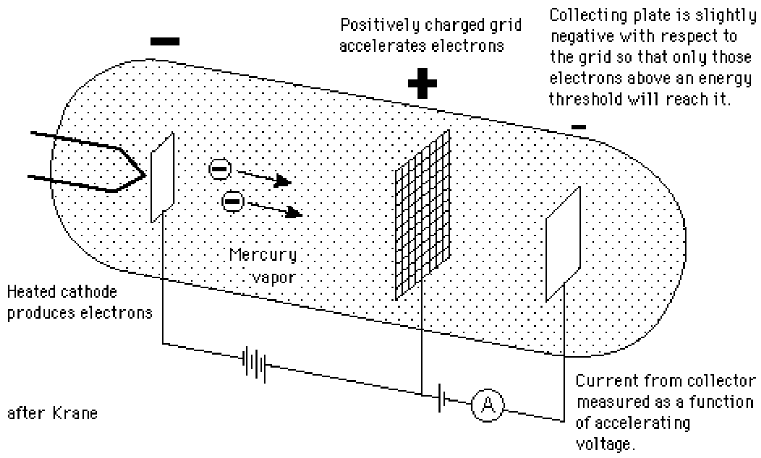
נשים לב שהספקטרום הקוונטי בניגוד לזה הקלאסי מקוונטט - לא כל תדירות אפשרית.

ניסוי פרנק-הרץ

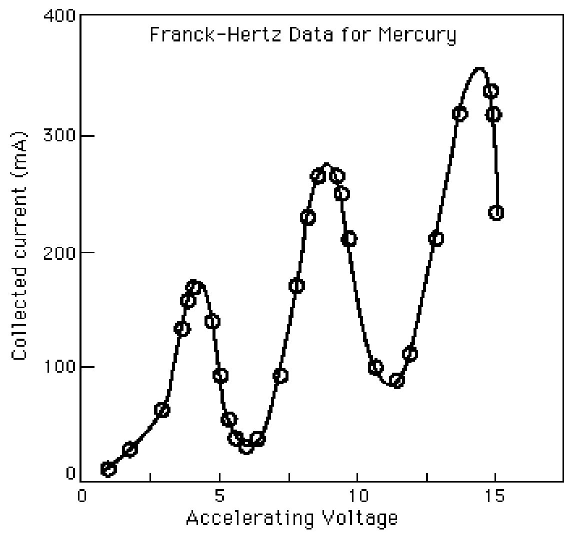
מודל בוהר מסביר את הספקטרוסקופיה של אטום המימן באמצעות ההנחה שהאנרגיה של האלקטרון מקוונטטת. התדירויות שאליהן מגיב האטום נקבעות לפי הפרשי האנרגיה של המעברים האפשריים בין רמות האנרגיה. בהסבר כזה האלקטרון הוא "קוונטי" ואל השדה האלקטרומגנטי ניתן להתיחס כאוביקט "קלאסי". לכאורה אפשר אולי לנסות למצוא תאוריה שבה האלקטרון הוא "קלאסי" ושהקפיצות האנרגטיות נובעות מהקוונטיזציה של השדה האלקטרומגנטי.

בהרצאה הבאה נסביר שהאנרגיה של תנודה אלקטרומגנטית בתדר Ω יכולה להימסר לאלקטרון אך ורק בקוונטות של $\hbar\Omega$. זאת היתה ההנחה של פלאנק ושל אינשטיין על מנת להסביר את הקרינה של גוף שחור ואת האפקט הפוטו-אלקטרי. ננסה להשתמש בהנחה זו על מנת להסביר את הספקטרוסקופיה של אטום המימן. נניח שהאטום יכול להגיע באמצעות בליעת קרינה לאנרגיה E_n . באנרגיה כזאת תדירות התנועה של האלקטרון היא $\omega(E_n)$. תנאי הרזוננס הקלאסי אומר שהאטום במצב כזה יכול לבלוע אנרגיה בתדירות $\Omega \sim \omega(E_n)$. לכן האנרגיה הבאה שאליה הוא יכול להגיע באמצעות בליעת קרינה היא $E_{n+1} = E_n + \hbar\omega(E_n)$. אם נשתמש בכלל זה באופן רקורסיבי, החל ממצב היסוד, נקבל סט של אנרגיות שבהם האלקטרון יכול להמצא באופן מעשי כאשר מאירים אותו באמצעות "אור לבן" שכולל את כל התדירויות. בפועל רק התדירויות $\Omega \sim \omega(E_n)$ תיבלענה. זה נותן הסבר אלטרנטיבי לספקטרוסקופיה של האטום שאינו דורש את הנחת הקוונטיזציה של בוהר ודה-ברולי.

ניסוי פרנק-הרץ נותן הוכחה ישירה לקוונטיזציה של אנרגית האלקטרון. את השדה האלקטרומגנטי משאירים מחוץ למשחק. אם האנרגיה של האלקטרון היא מקוונטטת נובע מכך שנדרשת אנרגית עירור מינימלית על מנת ליצור מעברים בין רמות אנרגיה באטום. את האנרגיה המינימלית הזו אפשר למדוד בניסוי כמתואר להלן:



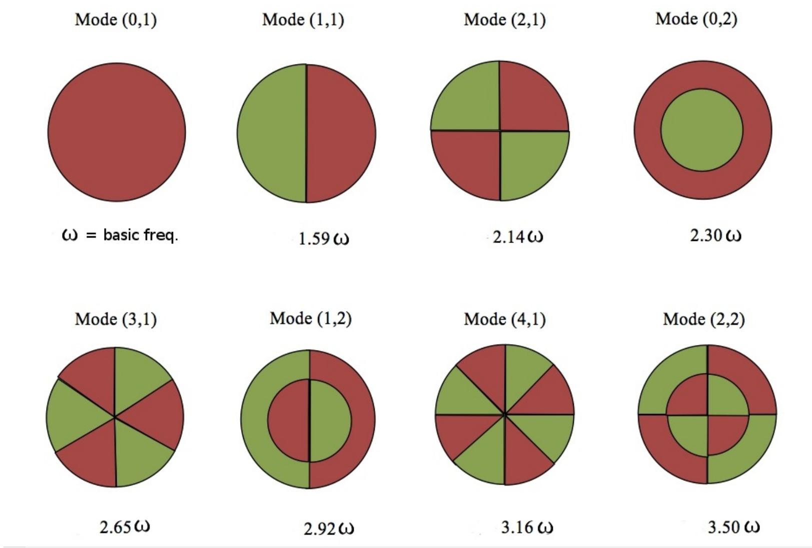
האינדיקציה לכך שהאלקטרונים המואצים יכולים לעורר את אטומי הכספית, היא נפילה בזרם כאשר מתח ההאצה עובר ערך סף מסוים. היתרון העיקרי של שימוש בגז של אטומי כספית הוא המסה הגדולה שלהם: הרתע בעת התנגשות של אלקטרון באטום הוא קטן, ולכן הערך של מתח הסף משקף נאמנה את האנרגיה המינימלית שנדרשת לעירור האטום.



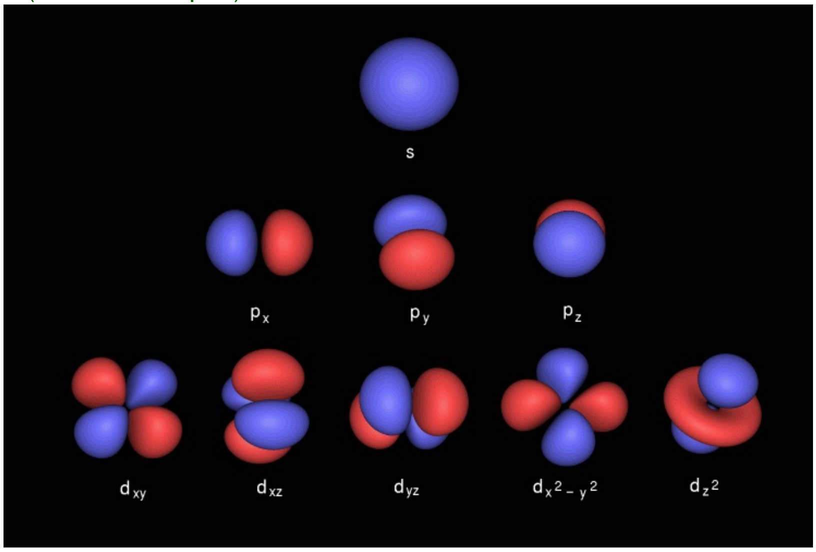
אורביטלים אטומיים

האטום של בוהר מבוסס על תמונה חד-מימדית שגויה של תנועת האלקטרון סביב הגרעין. המודל מניח שהתחום המרחבי ("האורביטל") שבו נע האלקטרון הוא טבעתי. בפתרון "הנכון" מתברר שהאורביטלים נראים אחרת: יש אורביטלים כדוריים (s), פולריים (p), ואחרים (d,f,...). כדי להבין את הבעיה עם מודל בוהר כדי לשים לב שמבחינה מתמטית האנליזה של "חלקיק בקופסא חד מימדית" זה כמו ניתוח תנודות של מיתר , ובדומה לכך "האלקטרון במודל בוהר" זה כמו ניתוח תנודות של טבעת . במילים אחרות במודל בוהר מתיחסים לאופי הגלי של האלקטרון כאילו הוא בא לכדי ביטוי רק לאורך המסלול הקלאסי. באנליזה הקוונטית המלאה, האלקטרון באטום יוצר " עננה " מסביב לגרעין. לכן האנליזה דומה לניתוח של תנודות האוויר בתוך תיבת תהודה כדורית . אילו האטום היה דו-מימדי, האנליזה היתה דומה לניתוח תנודות של ממברנת תוף . למעשה זה "נס" שמודל בוהר נותן תוצאות נכונות. אם פוטנציאל המשיכה בין האלקטרון לפרוטון לא היה $1/r$ המודל היה נותן תוצאות שגויות.

מודים של ממברנת תוף (המקרה הדו-מימדי):



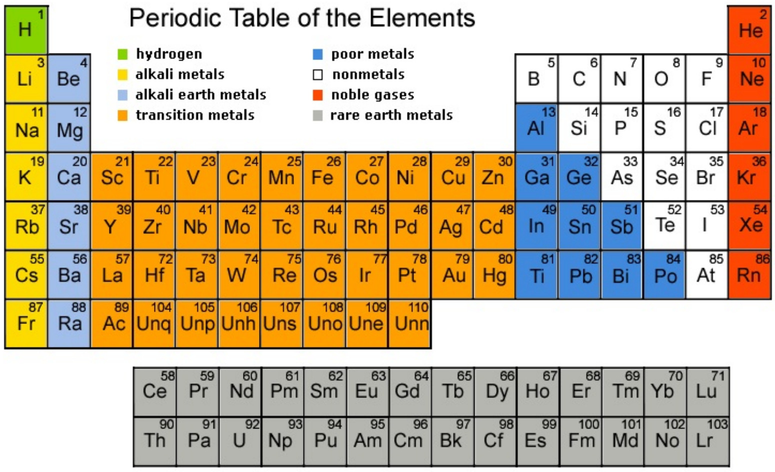
אורביטליים אטומיים הם כמו מודים של תיבת תהודה כדורית (המקרה התלת מימדי):



מערכת היסודות

המכניקה הקוונטית נותנת פרשנות למבנה מערכת היסודות של מנדליב. הפרשנות מתבססת על ההנחות הבאות:

- רמת האנרגיה הראשונה של בוהר היא אורביטל s
- רמת האנרגיה השניה של בוהר כוללת אורביטל מטיפוס s, ושלושה אורביטלים מטיפוס p
- רמת האנרגיה השלישית של בוהר כוללת אורביטל מטיפוס s, שלושה אורביטלים מטיפוס p, וחמישה אורביטלים מטיפוס d
- רמת האנרגיה הרביעית של בוהר כוללת אורביטלים מטיפוס s, p, d, f
- בכל אורביטל יכולים לשבת עד שני אלקטרונים



מצבים קוונטיים של אוסצילטור הרמוני

forum link

מצבים קוונטיים של אוסצילטור הרמוני

אוסצילטור (מתנד) הרמוני הוא מודל פיסיקלי המתאר תנודה של חלקיק קשור (אובייקט הקשור לקפיץ, מטוטלת וכו'). המחשה טובה למתנד הרמוני ניתן למצוא בקישור הבא: youtube. מודל זה הוא חשוב מאוד בפיסיקה מאחר וניתן לייצג (בקרוב) מערכות רבות כאוסף של אוסצילטורים. כל "מוד" של תנודה מאופין על ידי תדירות מסוימת ω .

- התנודות של כדורים קשורים בקפיצים
- התנודות של מיתר
- התנודות של ממברנת תוף
- התנודות של צפיפות/לחץ האויר
- התנודות של השדה האלקטרומגנטי

פורמאלית נתייחס לאוסצילטור כאל חלקיק בפוטנציאל פראבולי:

$$V(x) \ \propto \ \frac{1}{2}x^2$$

קלאסית תדירות התנודה של אוסצילטור הרמוני אינה תלויה באנרגיה או באמפליטודה של התנועה. קוונטית היא אמורה להקבע על ידי הנוסחא

$$\omega = E_n - E_m$$

בהנחה שהפתרון הקוונטי תואם את הפתרון הקלאסי אנו מסיקים

$$E_n = \omega n + \text{const}$$

כלומר, האנרגיות המקוונטטות באוסצילטור הרמוני הן בעלות מרוחים שוים.
אם רמת היחוס של האנרגיה היא קרקעית הפוטנציאל אז הנוסחא המתקבלת היא למעשה

$$E_n \ = \ \left(\frac{1}{2}+n\right)\hbar\omega$$

$$n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

זאת בניגוד לחלקיק בקופסא, שם האנרגיה נתונה על ידי הביטוי:

$$E_n = \frac{1}{2M}(\frac{\hbar\pi}{L}n)^2 = Cn^2$$

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

קוונטיזציה של שדות

כאמור, מודל האוסצילטור ההרמוני מאפשר לנו לייצג תופעות פיסיקליות שונות. בפרט הוא מתאר את אופני התנודה (מודים) של השדה האלקטרומגנטי. אם יש לנו עירור של מוד לרמה n אנו אומרים שיש לנו כביכול n פוטונים שמאכלסים את אותו מוד. באופן דומה מתיחסים לאופני התנודה של האטומים בגביש: אם יש לנו עירור של מוד לרמה n אנו אומרים שיש לנו כביכול n פונונים שמאכלסים את אותו מוד. נוח להתיחס לעירורים האלה כאל חלקיקים. במילים אחרות "רמת עירור" = "רמת איכלוס"

$$E_n = \left(\frac{1}{2} + n\right)\hbar\omega = E_{\text{vacuum}} + nE_\gamma$$

באשר אנרגית הואקום היא

$$E_{\text{vacuum}} = \frac{1}{2}\hbar\omega$$

והאנרגיה של כל קוונטה היא

$$E_\gamma = \hbar\omega$$

- קוונטות של אנרגיה בתנודות אקוסטיות = פונונים
- קוונטות של אנרגיה בתנודות אלקטרומגנטיות = פוטונים

קיבול חום של מוצקים

העדות הנסיונית הפשוטה ביותר לקוונטיזצית האנרגיה של מתנד היא מדידית קיבול חום של מוצקים. לפי המכניקה הקלאסית האנרגיה התרמית של מתנד אמורה להיות

$$E_{oscillator} = k_B T$$

באשר T היא הטמפרטורה, והמקדם בנוסחא נקרא קבוע בולצמן. אם יש לנו גביש שמורכב מ-N אטומים, שכל אחד מהם יכול לנוע בשלושה כיוונים מרחביים, אז מספר אופני התנודה של הגביש יהיה 3N, ולכן אנרגיה התרמית תהיה $E = 3N\,k_B T$, וקיבול החום של הגביש יהיה

$$C \equiv \frac{dE}{dT} = 3N\,k_B$$

זה נקרא חוק דיולונג-פטיט. נסיונית מתברר שחוק שזה לא מתקיים בטמפרטורות נמוכות. קיבול החום מתחת לטמפרטורה מסוימת מתחיל לרדת. ההסבהר הקוונטי לתופעה הוא כדלהלן. בגלל הקוונטיזציה האנרגיה של מתנד יכולה לקבל רק ערכים דיסקרטיים:

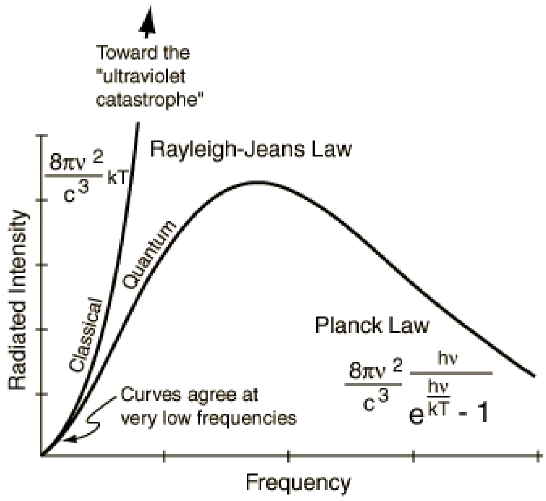
$$E_{oscillator} = \hbar\omega \times \text{integer}$$

כאן השתמשנו ביחידות SI ולכן כללנו באופן מפורש את קבוע פלאנק. אם הטמפרטורה נמוכה אז כל המתנדים שהתדירות שלהם מקיימת $\hbar\omega > k_B T$ יהיו במצב היסוד: הסביבה התרמית לא תוכל לעורר אותם. המתנדים היחידים שמשתתפים במשחק ותורמים לקיבול החום, הם אלו שמקיימים $\hbar\omega < k_B T$. הנוסחא הקוונטית שמתארת את התלות של קיבול החום בטמפרטורה פותחה על ידי דבאי.

קרינת גוף שחור

[forum link]()

למעשה ההופעה הראשונה של הקבוע של פלאנק היתה בהקשר של "קרינת גוף שחור". הכוונה לקרינה שנפלטת מגוף אידיאלי שמצוי בשיווי משקל תרמי. הדרך לחשוב על גוף כזה או "לייצר אותו" זה כדלהלן: לוקחים תנור שמוחזק בטמפרטורה קבועה, קודחים חור בדופן של התנור, ומודדים את הקרינה שנפלטת מהחור. בתווך שממנו נפלטת הקרינה יש את המודים של השדה האלקטרומגנטי. לפי הפיסיקה הקלאסית כל מוד כזה פולט קרינה שפרופורציונלית לטמפרטורה. בפועל מה שרואים זה שהמודים בעלי התדר הגבוה כמעט שלא פולטים קרינה. את זה אפשר להסביר על ידי ההנחה שהאנרגיה של התווך מקוונטטת. אם הטמפרטורה נמוכה מהאנרגיה שדרושה לעורר מוד אז כמעט שלא תפלט קרינה. לפרטים נוספים ראה [hyperphysics]



הפוטון כחלקיק

האפקט הפוטואלקטרי

[forum link]

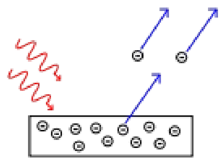
בתאוריה הקלאסית אם פולס אלקטרומגנטי בעל אנרגיה E_γ תולש אלקטרון ממתכת, אז האנרגיה הקינטית של האלקטרון הנפלט תהיה

$$E_e \;=\; E_\gamma - W$$

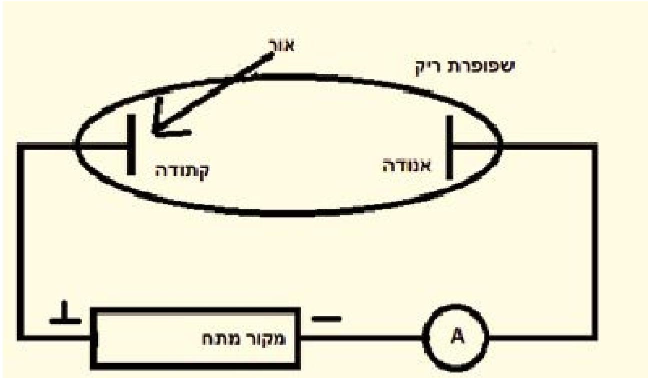
באשר W היא פונקצית העבודה של המתכת, ז"א העבודה שיש לעשות כדי לתלוש ממנה את האלקטרון. לפי נוסחא זו סביר שאור עם עצמה חזקה יותר יגרום לשחרור של אלקטרונים עם אנרגיה קינטית גדולה יותר. בפועל מתברר שהאנרגיה הקינטית שאיתה משתחררים האלקטרונים תלויה בתדירות ולא בעצמה של הקרינה. זה אומר שהקרינה מגיעה כביכול "בקוונטות". את הגודל של כל "קוונטה" ניתן לקבוע באופן נסיוני:

$$E_\gamma \;=\; \hbar\omega$$

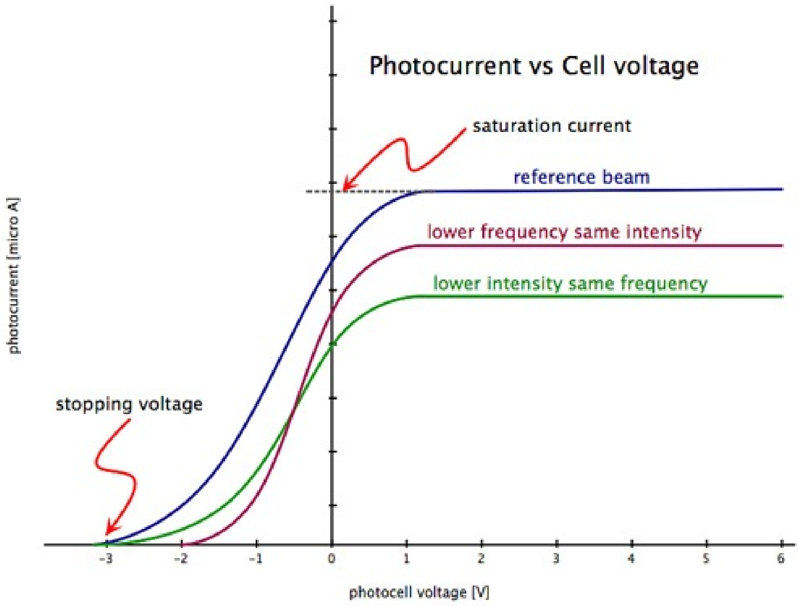
בשיטת היחידות שבה אנו עובדים יש לאנרגיה יחידות של תדירות, והמקדם המספרי שווה לאחד.



הקונפיגורציה המקובלת בניסוי מתוארת להלן



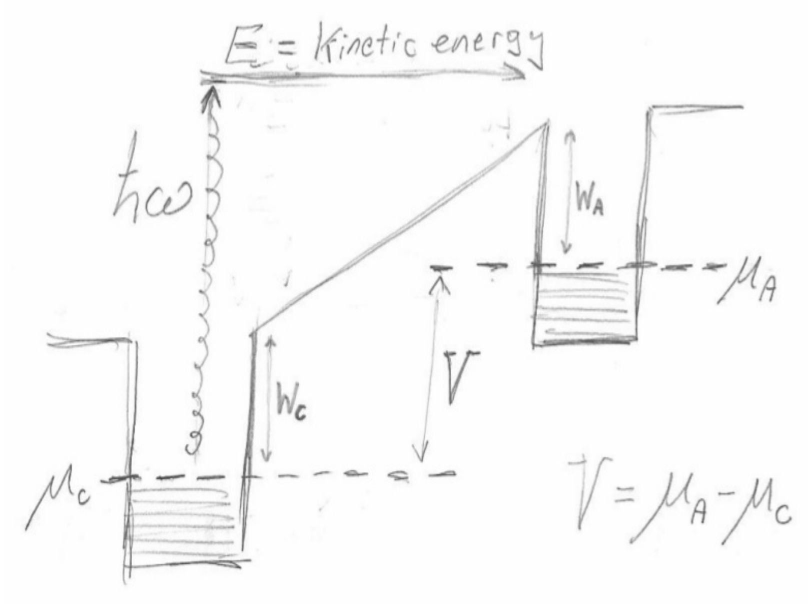
התלות של הזרם במתח מומחשת בציור הבא (אני סבור שהציור שגוי - עבור אותה עוצמה, אם התדירות נמוכה יותר, אז יותר אלקטרונים יפלטו ליחידת זמן):



על מנת לדעת מה האנרגיה הקינטית שאיתה משתחררים האלקטרונים מהקטודה מה שמודדים בניסוי זה את מתח העצירה. הנוסחא לחישוב מתח העצירה היא

$$eV_{\text{stopping}} = \hbar\omega - W'$$

נאיבית מה שאמור להופיע בנוסחה היא פונקצית העבודה של הקטודה. זו טעות נפוצה שקיימת ברוב ספרי הלימוד, וברוב תדריכי המעבדה. למעשה מה שמופיע בנוסחא זו פונקצית העבודה של האנודה. עם זאת לא מן הנמנע שבמהלך פעולת השפופרת אטומים מהקטודה משתחררים ומצפים את האנודה: אם זה קורה אז האנודה "תתחזה" לאנודה מבחינת פונקצית העבודה.



לפרטים נוספים על נקודה מבלבלת זו ראה:

1. PhotoElectric.pdf - a schematic drawing
2. *Concerning a widespread error in the description of the photoelectric effect* , Rudnick J. and Tannhauser D. S., American Journal of Physics 44(8) 796 (1976)
3. *Photoelectric effect, a common fundamental error* , iopscience , and further comment in iopscience
4. *Photoelectric effect, experimental confirmation concerning a widespread misconception in the theory* , iopscience

פיזור תומפסון-ריילי

forum link

פיזור תומפסון-ריילי היא הפרדיקציה הקלאסית של פיזור גל אלקטרומגנטי ע"י אלקטרון, תוך התעלמות מהרתע של האלקטרון. זאת בניגוד לפיזור קומפטון שבו כן מתיחסים לרתע של האלקטרון, ואז מתברר שהקרינה האלקטרומגנטית מקוונטטת. באנליזה של פיזור תומפסון-ריילי מתיחסים לאלקטרון כאל חלקיק קשור לקפיץ. מממשוואת התנועה של "מתנד הרמוני מדורבן" נובע שהשדה גורם לאלקטרון להתנודד עם אמפליטודה

$$\mathrm{Amplitude}[x] \;\propto\; \frac{\mathrm{Amplitude}[\mathcal{E}]}{|\omega^2-\omega_0^2|}$$

האלקטרון המואץ פולט קרינה "דיפולית" שעוצמתה

$$I \;\propto\; \ddot{x}^2$$

מכאן מקבלים את נוסחת תומפסון-ריילי עבור חתך הפעולה לפיזור:

$$\sigma \;=\; \frac{8\pi}{3}\left(\frac{e^2}{mc^2}\right)^2\left|\frac{\omega^2}{\omega^2-\omega_0^2}\right|^2$$

הביטוי בסוגריים נקרא הרדיוס הקלאסי של האלקטרון. זה קובע את חתך הפעולה של תומפסון בגבול $\omega_0 \ll \omega$ שבו ניתן להתיחס אל האלקטרון המפזר כאל חלקיק חופשי (בלתי קשור). אם לעומת זאת $\omega \ll \omega_0$ מקבלים את נוסחת ריילי שאומרת שגל אלקטרומגנטי עם תדירות נמוכה יותר מתפזר פחות. זה מסביר מדוע השמיים כחולים והשמש כתומה: התדירויות האדומות מתפזרות פחות. האפקט חזק במיוחד בעת השקיעה: כמעט כל הכחול מתפזר ויש הרבה אדום במרכז.

לפרטים נוספים: http://en.wikipedia.org/wiki/Thomson_scattering

פיזור קומפטון

forum link

נתיחס אל הפולס האלקטרומגנטי כאל "חבילת גלים" שיש לה תדירות ω ואנרגיה כוללת E_γ . בשלב זה אנו מתיחסים לאור כאל קלאסי ומתעלמים מכך שהאנרגיה מגיעה בקוונטות. מיחס הדיספרסיה הרלטיביסטי נובע שהתנע הכלל של חבילת הגלים הוא

$$P_\gamma \;=\; E_\gamma/c$$

החבילה היא כמו חלקיק עם מסה אפס. אם היא מתנגשת עם קיר נייח היא חוזרת עם אותה תדירות אבל עם תנע הפוך. לעומת זאת אם היא מוחזרת מקיר שנע במהירות v_e אז היא מוחזרת עם תדירות אחרת. זה נקרא אפקט דופלר . אותו דבר יקרה אם נפעיל צופר אחרי משאית נוסעת: הקול יוחזר מהמשאית עם תדירות נמוכה יותר. נוסחא מקורבת לשינוי בתדר היא:

$$\frac{\omega'-\omega}{\omega} \;\approx\; -2\frac{v_e}{c}$$

כאן הפולס לא מוחזר מקיר בעל מסה אין סופית אלא מאלקטרון. נניח שהאלקטרון היה במנוחה, ושההתנגשות היא head on. כתוצאה מפגיעת הפולס האלקטרון יקבל תנע $2P_\gamma$. זאת אומרת שהמהירות הממוצעת שלו במהלך ההתנגשות (כתוצאה מהרתע) היא:

$$v_e \;=\; \frac{1}{m_e}P_\gamma$$

אם נציב את זה בנוסחת אפקט דופלר נקבל

$$\frac{\omega'-\omega}{\omega} \;\approx\; -2\frac{E_\gamma}{m_e c^2}$$

או במונחים של שינוי אורך גל:

$$\lambda'-\lambda \;\approx\; 4\pi\frac{E_\gamma/\omega}{m_e c}$$

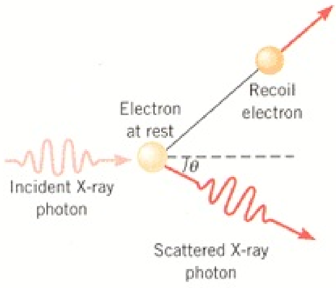
כמו באפקט הפוטואלקטרי לכאורה פולס אנרגטי יותר יגרום לרתע גדול יותר ולכן לשינוי גדול יותר באורך הגל של הקרינה המוחזרת. אבל בפועל מתברר שאין זה נכון. כדי להסביר את תוצאות הניסוי עלינו להניח שהאנרגיה מגיעה בקוונטות, ואז מקבלים

$$\lambda'-\lambda \;\approx\; \frac{4\pi\hbar}{m_e c}$$

הניתוח הקינמטי המקובל של ההתנגשות מתיחס לפוטון לא כאל "גל" אלא כאל חלקיק בעל אנרגיה $E_\gamma = \hbar\omega$, ולוקח בחשבון את הזוית שבה נרתע האלקטרון. מתוך שימוש בחוקי שימור של אנרגיה ותנע בהתנגשות, ראה wiki , מקבלים את נוסחת קומפטון

$$\lambda'-\lambda \;=\; \frac{2\pi\hbar}{m_e c}(1-\cos\theta)$$

התוצאה הזו קונסיסטנטית עם התוצאה שקיבלנו בהנחת התנגשות head on. נשים לב שבגין הדואליות את נוסחת דופלר אפשר לפרש בשתי דרכים שקולות: שינוי תדר של גל כתוצאה מהתנגשות עם קיר זז, או לחילופין, שינוי באנרגיה של חלקיק שמתנגש בקיר זז.



אורך גל קומפטון

מהתבוננות בנוסחת קומפטון אפשר לראות שהמסה של החלקיק מכניסה לבעיה סקלת אורך שנקראת אורך גל קומפטון:

$$\lambda_c \equiv \frac{2\pi\hbar}{mc}$$

את המשמעות הפיסיקאלית של אורך גל זה אפשר להסביר בצורה הבאה. נניח שאנו כולאים חלקיק בקופסא. אם גודל הקופסא L קטן מספיק, האנרגיה הקינטית המינמלית של החלקיק תהיה מסדר גודל של אנרגית המנוחה שלו. זה מוביל למשוואה

$$\frac{(\hbar/L)^2}{m} \sim mc^2$$

הפתרון של המשוואה הזו מוביל להגדרה של אורך גל קומפטון.

אבחנה בין פרמיונים ובוזונים

[forum link]

ראינו שלקוונטות של השדה האלקטרומגנטי ניתן להתיחס כאל חלקיקים, "פוטונים", המאכלסים את המודים של השדה. מספר הפוטונים שיכולים לשבת באותו "מוד" הוא בלתי מוגבל. חלקיקים מסוג כזה אנו אומרים שהם "בוזונים". בניגוד לכך על מנת להבין את מבנה האטומים עלינו להניח שהאלקטרונים הם "פרמיונים", ז"א ששני חלקיקים לא יכולים לשבת באותו "מצב" . מגבלת איכלוס זו נקראת "האיסור של פאולי".

משפט הספין והסטטיסטיקה

כאשר דיראק ניסה לתאר את יחס הדיספרסיה של אלקטרון במסגרת המכניקה הקוונטית, התברר שיש לכך השלכות לא טריוויאליות: יש להניח שלאלקטרון יש ספין 1/2, ויש להניח שיש גם אנטי-חלקיק (שאחר כך קראו לו פוזיטרון). בנוסף חייבים להניח שהאלקטרון הוא פרמיון. בהמשך נוסח משפט "הספין והסטטיסטיקה": חלקיקים עם ספין חצי שלם חייבים להיות פרמיונים, בעוד שחלקיקים עם ספין שלם חייבים להיות בוזונים.

מבנה האטום

עיקרון האיסור של פאולי עוזר להבין את מבנה קליפות האלקטרונים באטום. אורביטלים הם המצבים המרחביים האפשריים של אלקטרון בודד מסביב לגרעין. בשלב זה אנו מתעלמים מהספין. דרושים שני "מספרים קוונטיים" כדי לתייג את האורביטלים: מספר קוונטי ראשי n שמופיע במודל בוהר, ותנע זויתי $\ell = 0, 1, 2, 3, \ldots$. עבור המספר הקוונטי השני נהוג להשמש בסימון $\ell = s, p, d, f, \ldots$ שמרמז על הצורה המרחבית של האורביטל. כיוון שלאלקטרון יש ספין 1/2, כל אורביטל יכול לאכלס עד שני אלקטרונים (ראה הסבר מורחב בהמשך). דוגמאות לקונפיגורציות אלקטרוניות:

$$H: \; 1s^1$$

$$He: \; 1s^2$$

$$_6C: \; 1s^2 \; 2s^2 \; 2p^2$$

$$_8O:\ 1s^2\ 2s^2\ 2p^4$$

$$_{10}Ne:\ 1s^2\ 2s^2\ 2p^6$$

סינגלט

שני אלקטרונים יכולים לאכלס את אותו אורביטל כיוון שאחד יכול להתישב עם ספין up והשני עם ספין down. זה ניסוח מקובל בספרי לימוד אלמנטריים. מבחינה מתמטית הרעיון דורש הבהרה יותר רצינית. לכאורה משתמע שהמצב הקוונטי של שני האלקטרונים הוא

$$|\psi\rangle \ = \ |\uparrow\downarrow\rangle$$

במצב זה האלקטרונים *לכאורה* מקיימים את "האיסור של פאולי, וכמו כן *לכאורה* הספין הכולל הוא אפס. למעשה שתי הטענות אינן נכונות. בהרצאה הבאה נראה שאם היה מצב כזה, והיו מודדים את שני הספינים בכיוון ציר X, אז היתה הסתברות סופית למצוא אותם באותו כיוון. כך שלמעשה המצב שהוגדר לעיל אינו מקיים את האיסור של פאולי, והספין הכולל שהוא מייצג אינו אפס. לכאורה אפשר גם לחשוב על צרופים היפותתיים אחרים כגון $|\rightarrow\leftarrow\rangle, \quad |\uparrow\rightarrow\rangle, \quad |\downarrow\uparrow\rangle$ ולכולם יש את אותה "בעיה". יש כאן גם עניין "אסתטי": האלקטרונים הם חלקיקים זהים, בעוד שלמצבים האלה אין סימטריה מוגדרת. בהרצאה הבאה נראה שיש למעשה רק "מצב איכלוס" אחד שהוא בא בחשבון:

$$|singlet\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

מצב זה נקרא "סינגלט". במצב כזה הספין הכולל של שני האלקטרונים הוא אפס בכל כיוון מדידה. מכאן גם שהמצב הזה מקיים את האיסור של פאולי: לא ניתן למצוא את האלקטרונים עם ספינים באותו כיוון. יש להדגיש שמצב הסינגלט הוא אחד ויחיד: בכל שאר המצבים אפשר למצוא את האלקטרונים עם ספין כולל שונה מאפס. בנוסף, למצב הזה יש סימטריה מוגדרת: הוא אנטי-סימטרי ביחס להחלפת החלקיקים. בפורמאליזם המסורתי של המכניקה הקוונטית דורשים שפונקצית הגל של הפרמיונים תהיה "אנטי סימטרית": זה למעשה הניסוח המתמטי של "עקרון האיסור של פאולי".

תאור מתמטי של מצב הסינגלט

forum link

נתונה מערכת של שני חלקיקים שלכל אחד יש ספין 1/2. נרצה למצוא מצב שבו הספין הכולל של המערכת הוא $S=0$ באופן ודאי (בהסתברות 100%). להלן נוח להשתמש בסימון $|\bar{z}\rangle$, $|z\rangle$ במקום הסימון $|\downarrow\rangle$, $|\uparrow\rangle$. נתבונן תחילה במצב $|z\bar{z}\rangle$. מצב זה אינו מאופין בתנע זויתי כולל אפס. כדי להיווכח בכך נניח שאנו מודדים את הקיטוב בכיוון אופקי. נרשום את המצב בבסיס שמתאים למדידה כזו ונקבל:

$$|z\bar{z}\rangle \ = \ \frac{1}{2}(|xx\rangle - |x\bar{x}\rangle + |\bar{x}x\rangle - |\bar{x}\bar{x}\rangle)$$

אנו רואים ש הסתברות של 25% למדוד ספין כולל 1 והסתברות 25% למדוד ספין 1-. במילים אחרות, במדידה אופקית יש הסתברות של 50% למצוא את שני הספינים באותו כיוון. למעשה יש רק מצב אחד של המערכת שבו מתקבל ספין כולל אפס בכל מדידה אפשרית:

$$|S_0\rangle \ = \ |singlet\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\downarrow\rangle - |\downarrow\uparrow\rangle)$$

לדוגמה, נשים לב שמתקיים

$$|S_0\rangle \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\bar{z}\rangle - |\bar{z}z\rangle) \ = \ \frac{1}{\sqrt{2}}(|x\bar{x}\rangle - |\bar{x}x\rangle)$$

כך שגם במדידה בכיוון אופקי מתקבל ספין כולל אפס בהסתברות של 100%. באמצעות ההצבות

$$|\theta\rangle = \cos\frac{\theta}{2}\ |z\rangle + \sin\frac{\theta}{2}\ |\bar{z}\rangle$$

$$|\bar{\theta}\rangle = \sin\frac{\theta}{2}\mid z\rangle - \cos\frac{\theta}{2}\mid \bar{z}\rangle$$

נוודא שבאופן כללי מתקיים

$$|S_0\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\left(|\theta\bar{\theta}\rangle - \mid \bar{\theta}\theta\rangle\right) \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\bar{z}\rangle - \mid \bar{z}z\rangle)$$

חישוב פונקצית קורלציה

נתייחס לשני חלקיקים שהספינים שלהם במצב סינגלט. מצב כזה יכול למשל להתקבל בהתפרקות של חלקיק בעל ספין אפס לשני חלקיקים בעלי ספין חצי. בגלל חוק שימור התנע הזויתי הספין הכולל לאחר ההתפרקות יהיה עדיין אפס - כך שהמצב חייב להיות מצב סינגלט. במצב כזה יש קורלציה בין החלקיקים. אם מודדים את הקיטוב האופקי אז אם אחד מהספינים הוא up אז השני חייב להיות down. נתיחס עתה למקרה כללי יותר. נניח שאנו מודדים את הקיטוב של הספין הראשון בכיוון אנכי, ואת הקיטוב של הספין השני בכיוון θ . נסמן את תוצאות המדידה בצורה הבאה:

$$a = \pm 1$$
$$b = \pm 1$$

נרשום את מצב הסינגלט בבסיס שמתאים למדידה כזו ונקבל:

$$|S_0\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(|z\bar{\theta}\rangle - \mid \bar{z}\theta\rangle\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(|z\theta\rangle + \mid \bar{z}\bar{\theta}\rangle\right)$$

נאפיין את הקורלציה בין שתי התוצאות באמצעות המכפלה

$$c \;=\; ab$$

מהסתכלות אנו רואים שמתקיים

$$\text{Probability}(c=1) \;=\; \left|\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|^2$$
$$\text{Probability}(c=-1) \;=\; \left|\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right|^2$$

מכאן אנו מקבלים את הקורלציה

$$C(\theta) \;=\; \langle c\rangle \;=\; \langle ab\rangle \;=\; -\cos(\theta)$$

נבדוק את התוצאה שקיבלנו עבור זוויות מעניינות:

עבור $\theta = 0$ נקבל כי $\langle ab\rangle = -1$. משמעות הדבר היא שאם a=1 אז בוודאות b=-1.

עבור $\theta = \pi$ נקבל כי $\langle ab\rangle = 1$. משמעות הדבר היא שאם a=1 אז בוודאות b=1.

עבור $\theta = \pi/2$ נקבל כי $\langle ab\rangle = 0$. משמעות הדבר היא שאם a=1 אז יש סיכוי שווה לקבל b=1 או b=-1.

האם העולם קלאסי - ניסוי להדגמת חוסר ראליזם

[forum link]

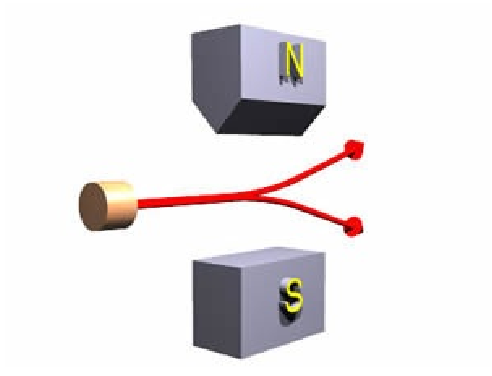
הגדרת המושג "עולם קלאסי"

- ראליזם: כל מדידה שאפשר לבצע על מערכת יש לה תוצאה מוגדרת-היטב גם אם לא ביצענו את המדידה בפועל.
- דטרמיניזם: אם ברגע מסוים יודעים את המצב המדויק של מערכת סגורה, אז אפשר לקבוע מתוך כך את כל המצבים שלה בעבר ובעתיד.

בתור דוגמה נתיחס לקיטוב של אלקטרון. כאשר מקטבים את האלקטרון בכיוון אופקי, ומשגרים אותו למכשיר שטרלן-גרלך שמוצב אנכית, תוצאת המדידה יכולה להיות $a_y = +1$ או $a_y = -1$ בהסתברויות שוות. לעובדה תצפיתית זו אפשר לתת שתי אינטרפטציות שונות:

אינטרפטציה קלאסית: באופן עקרוני, כאשר נדע למדוד את האלקטרון יותר טוב, נוכל לנבא בניסוי כזה מה תהיה התוצאה של המדידה. האספקט ההיסתברותי משקף מצב של "חוסר ידע" . זה כמו לנסות לחזות את התוצאה של זריקת מטבע - אם המידע על תנאי ההתחלה מספיק מדויק ניתן לתת ניבוי תקף לגבי התוצאה.

אינטרפטציה קוונטית: באופן עקרוני לא ניתן לחזות את התוצאה. האספקט ההסתברותי משקף מצב של " אי ודאות ". הסיבה לכך היא שקיטוב אופקי הוא סופרפוזיציה של מצבי הקיטוב האנכיים. אותו רעיון עומד בבסיס ההסבר הקוונטי של ניסוי שני סדקים (חלקיק יכול להיות בשני מקומות שונים בו זמנית).



כיוון התקדמות הקרן הוא Z

כיוון מדידת הקיטוב בציור הוא אנכי (Y)

$$a_y = \pm 1$$

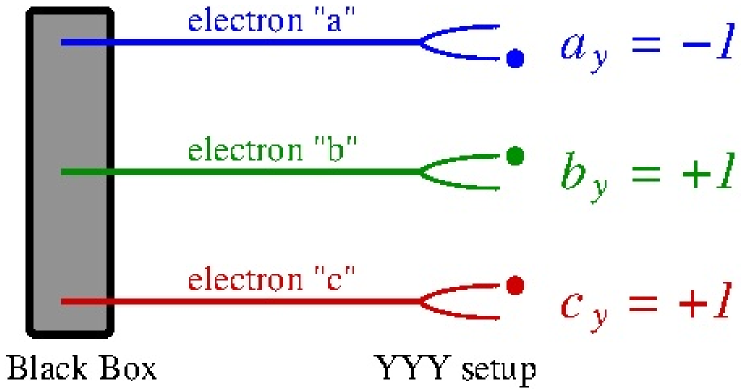
כיוון מדידה אלטרנטיבי הוא אופקי (X)

$$a_x = \pm 1$$

לכאורה השאלה "האם העולם קלאסי" היא פילוסופית: וריאציה על שאלת הדטרמיניזם שהטרידה פילוסופים במהלך המאות הקודמות. לכאורה אי אפשר לטעון שבעתיד לא תהיה תאוריה שתוכל לנבא את התוצאה של המדידה. למעשה מתברר שהשאלה היא פיסיקלית. הניסוי שאותו נתאר להלן מדגים שאת המציאות הקוונטית לא ניתן להסביר באמצעות תמונה קלאסית של המציאות. זו וריאציה על אי-שיוויון בל שבו נדון בהרצאה הבאה. יש להדגיש שלמרות שבמקור מדובר בניסויים מחשבתיים, אפשר לבצע אותם במעבדה.

תאור הניסוי

הניסוי המחשבתי של Mermin-Greenberger-Horne-Zeilinger מדגים שאת המציאות הנסיונית לא ניתן להסביר באמצעות תמונה קלאסית של המציאות. בניסוי משוגרים 3 אלקטרונים a,b,c שהוכנו בצורה מסוימת בתוך "קופסא שחורה" אל עבר שלושה גלאים. הגלאים הם מכשירי שטרן-גרלך. נגדיר את כיוון שיגור האלקטרונים כציר Z. נניח שאת כל אחד מהגלאים אנחנו מציבים או בכיוון X או בכיוון Y. בכל "הרצה" של הניסוי מתקבלים שלושה מספרים שאותם אנו מכפילים. בהתאם לכיוון שבו הוצבו הגלאים, XYY או YXY או YYX, התוצאה שנקבל תהיה עבור $a_x b_y c_y$ או עבור $a_y b_x c_y$ או עבור $a_y b_y c_x$.



נניח שיש לנו הכנה מסוימת המתאפינת בכך שבכל "הרצה" של הניסוי מקבלים בהסתברות של 100% תוצאות ודאיות כדלקמן:

- אם מודדים בבסיס XYY מקבלים $a_x b_y c_y = 1$
- אם מודדים בבסיס YXY מקבלים $a_y b_x c_y = 1$
- אם מודדים בבסיס YYX מקבלים $a_y b_y c_x = 1$

אם נכפיל את שלושת המשוואות זו בזו נקבל $a_x\, b_x\, c_x\, a_y^2\, b_y^2\, c_y^2 \;=\; 1$

מכאן אנו מסיקים שבהכרח מתקיים בכל הרצה $a_x b_x c_x \;=\; 1$

זו התחזית הקלאסית לתוצאה של מדידה זו. אם העולם הוא קוונטי אז מתברר שאפשר להכין את המערכת כך שהתחזית הזו לא תתקיים. עבור ההכנה המסוימת שבה מדובר התחזית הקוונטית היא שבכל "הרצה" מתקבל הערך

$$a_x b_x c_x \;=\; -1$$

זאת בסתירה לפרדיקציה הקלאסית. מכאן אנו מסיקים שאם המערכת מתוארת נכון קוונטית, אז לא יכולה להיות לתוצאות פרשנות קלאסית. בתפיסה הקוונטית לכל גודל יש ערך מדיד מוגדר גם אם הוא לא נמדד בפועל. לעומת זאת במכניקה קוונטית יש לנו את "עקרון אי הודאות". אם מודדים גדלים מסוימים אז גדלים אחרים הם מן הסתם חסרי ערך ודאי. זאת הסיבה שהדדוקציה שלעיל אינה תקפה בקונטקסט הקוונטי.

מצב חתול

ההכנה של 3 האלקטרונים שבה מדובר, ושמובילה לתוצאה הלא קלאסית שתוארה לעיל, נקראת "מצב חתול", כיוון שאפשר לקבל אותה בדרך שמתוארת בהרצאה על החתול של שרדינגר. כשם שהחתול של שרדינגר בתוך הקופסה הוא סופרפוזיציה של חתול חי וחתול מת, כך נמצאים 3 האלקטרונים בסופרפוזיציה של שני מצבים מנוגדים:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|\uparrow\uparrow\uparrow\rangle - |\downarrow\downarrow\downarrow\rangle)$$

להלן נוח להשתמש בנוטציות אחרות:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|zzz\rangle - |\bar{z}\bar{z}\bar{z}\rangle)$$

כעת נבטא את הסופרפוזיציה בבסיסים אחרים. נשתמש בזהויות הבאות:

$$|x\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\rangle + |\bar{z}\rangle)$$

$$|\bar{x}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\rangle - |\bar{z}\rangle)$$

$$|y\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\rangle + i \mid \bar{z}\rangle)$$

$$|\bar{y}\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|z\rangle - i \mid \bar{z}\rangle)$$

בבסיס XXX נקבל:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|\bar{x}xx\rangle + \mid x\bar{x}x\rangle + \mid xx\bar{x}\rangle + \mid \bar{x}\bar{x}\bar{x}\rangle)$$

בבסיס XYY נקבל:

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}(|\bar{x}y\bar{y}\rangle + \mid \bar{x}\bar{y}y\rangle + \mid x\bar{y}\bar{y}\rangle + \mid xyy\rangle)$$

כעת, ניקח את התוצאה שקיבלנו ונבדוק מה יקרה כשנמדוד את $a_x b_x c_x$. מהרישום בבסיס XXX אפשר לראות שהתוצאה היא 1- בהסתברות של 100%. לעומת זאת כשמודדים את $a_x b_y c_y$ התוצאה היא 1 בהסתברות של 100%. כנ"ל לגבי המדידה YXY והמדידה YYX. בהנחה שהפרדיקציה הקוונטית מתאמתת בניסוי, נובע מכך שהעולם הוא לא קלאסי.

האם העולם קלאסי - אינשטיין פודולסקי רוזן ואי השיוויון של בל

[forum link]

יחס סיבתי לעומת קורלציה

הנסיון מראה שאחוז חולי האלצהיימר בקרב המעשנים הוא נמוך מאוד. האם עישון עוזר למנוע אלצהיימר? ברור שלא. התוצאה הניסיונית מראה רק שיש קורלציה. במקרה זה הקורלציה היא לא בגלל יחס סיבתי אלא בגלל שאנשים שמעשנים לא זוכים לאריכות ימים. חשוב מאוד להבחין בין יחס סיבתי במובן של אינטראקציה, לבין יחס סיבתי לכאורה במובן הסתברותי / סטטיסטי. להלן דוגמה מעניינת:

הפרדוקס של מונטי הול:

יש שלוש דלתות.
מעמידים מכונית מאחורי אחת מהם.
המנחה נותן לך לבחור דלת.
המנחה פותח את אחת הדלתות האחרות.
המנחה נותן לך הזדמנות לשנות את דעתך.
פותחים את שלושת הדלתות - האם זכית במכונית?

טענות:

- בשלב מס.3 ההסתברות למצוא את המכונית באחת מן הדלתות היא שווה.
- בשלב מס.5 ההסתברות למצוא את המכונית בדלת האחרת היא כפולה.

מסקנה: המדידה "השפיעה" על מצב המכונית.

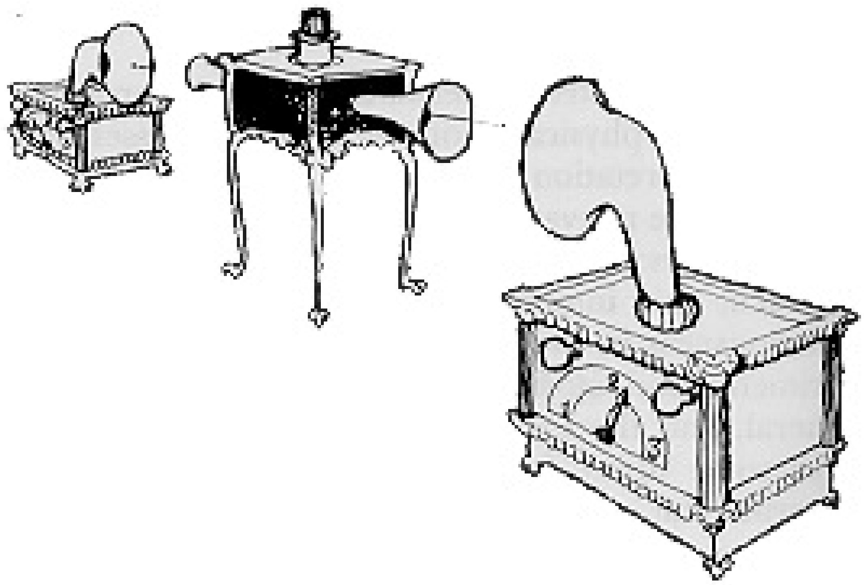
הניסוי המחשבתי של EPR

אינשטיין פודולסקי ורוזן הציעו בשנת 1935 לבחון את הניסוי המחשבתי הבא:

- חלקיק בעל ספין אפס מתפרק לשני חלקיקים בעלי ספין חצי
- חלקיק אחד מגיע לכדור הארץ והספין שלו נמדד בכיוון Z
- החלקיק השני מגיע לירח

המצב לפני המדידה: $|\Psi\rangle \;=\; |\uparrow,\downarrow\rangle \;-\; |\downarrow,\uparrow\rangle$
המצב לאחר המדידה: $|\Psi\rangle \;=\; |\downarrow,\uparrow\rangle$ או $|\Psi\rangle \;=\; |\uparrow,\downarrow\rangle$

לכאורה אפשר להגיד שמדידה על פני כדור הארץ גורמת לקריסת פונקצית הגל על הירח. אינשטיין קרא לזה spooky action at a distance. אם זה היה נכון זה היה עומד בסתירה לעקרונות תורת היחסות הפרטית: אינטראקציה לא יכולה לנוע מעבר למהירות האור. לכן ברור שמדובר כאן בקורלציה סטטסיטית, שקיימת גם אם העולם היה קלאסי ("חוק שימור התנע הזויתי"). בהקשר זה כדאי להזכיר את קיומה של no cloning theorem. אילו אנשי הירח היו מסוגלים לשכפל את האלקטרון שמגיע אליהם הם היו יכולים לדעת "מיידית" אם בוצעה מדידה בכדור הארץ.



האם יתכן שהעולם הוא קלאסי?

הגענו למסקנה שפונקצית הגל היא בעלת משמעות סטטיסטית בלבד. הפרוש הזה של המושג "מצב קוונטי" קרוי אינטרפטצית קופנהגן. האם זה אומר שאי אפשר לנבא באופן דטרמיניסטי את התוצאה של מדידה? ידועה אימרתו של אינשטיין "אלוהים לא משחק בקוביות". הספקולציה של אינשטיין היתה שהמכניקה הקוונטית אינה נותנת תאור שלם של המציאות: אם היינו יודעים את כל מה שאפשר על האלקטרונים שמתקבלים בשעת ההתפרקות, אז אפשר היה לנבא דטרמינסטית את התוצאות של כל מדידה. זו קרויה ההיפותזה של hidden variables. לאחר מותו של אינשטיין, הראה בל בשנת 1964, שההיפותזה הזו מובילה לאי שיוויון מסוים על פונקציות קורלציה (ראה להלן).

- לפי אי השיוויון של בל: $\mathcal{C} < 2$
- לפי המכניקה הקוונטית: $\mathcal{C}$ יכול להיות גדול יותר

אי השוויון של בל מתבסס על ההנחות הבאות:

- מדידה בכדור הארץ לא משפיעה על הירח
- התוצאה של המדידה נקבעת באופן דטרמינסטי

המסקנה הנסיונית היא: העולם אינו קלאסי, או שיש צורך בתאורית קונספירציה...

אי השיוויון של בל

נניח שיש שתי זויות אפשריות שבהן אנשי כדור הארץ יכולים להציב את מכשיר המדידה שלהם (the "a" aparatus), ושתי זויות אחרות שבהן אנשי הירח יכולים להציב את מכשיר המדידה שלהם (the "b" aparatus). את תוצאות המדידה נסמן בסימונים a, a', b, b' . התוצאה של מדידה היא תמיד +1 או -1 בהתאם לכיוון הספין. בהנחה שבכל "הרצה" של הניסוי הערכים של ארבעת המשתנים מוגדרים, בלי קשר לכך שאנו מודדים אותם או לא מודדים אותם, הרי שמתקיים טריוויאלית

$$ab + ab' + a'b - a'b' = \pm 2$$

לצורך הוכחה יש לשים לב שניתן לרשום את הביטוי בצורה $a(b+b') + a'(b-b')$. יש שתי אפשרויות: או שערכי b ו - b' שווים, או שהם מנוגדי סימן, בכל מקרה ערך התוצאה הוא ± 2 . אם נעשה ממוצע סטטיסטי על הערכים המתקבלים במספר רב של "הרצות" נקבל בהכרח תוצאה בתחום $[-2, 2]$ ולכן

$$|\langle ab\rangle + \langle ab'\rangle + \langle a'b\rangle - \langle a'b\rangle| \quad < \quad 2$$

כעת נבדוק אם אי השיוויון הזה מתקיים. לשם כך נזכר בגדרה של פונקצית קורלציה, ונרשום גם את התוצאה הקוונטית שמתיחסת למקרה של התפרקות חלקיק בעל ספין אפס לשני חלקיקים במצב סינגלט:

$$\langle ab\rangle \;=\; C(\theta_a-\theta_b) \;=\; -\cos(\theta_a-\theta_b)$$

נגדיר את הגודל

$$\mathcal{C} \;\equiv\; |C(\theta_a-\theta_b)+C(\theta_a-\theta_{b'})+C(\theta_{a'}-\theta_b)-C(\theta_{a'}-\theta_{b'})|$$

לפי אי השיוויון של בל צריך להתקיים

$$\mathcal{C} \;<\; 2$$

נבדוק מה מקבלים עבור $\theta_a=0^o,\;\;\theta_b=45^o,\;\;\theta_{a'}=90^o,\;\;\theta_{b'}\;=-45^o$

התוצאה היא

$$\mathcal{C} \;=\; \left|\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)+\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)-\left(+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right| \;=\; 2\sqrt{2}$$

התחזית הקוונטית נותנת תוצאה שעומדת בסתירה לאי השיוויון של בל. כיוון שהניסוי מאמת את הפרדיקציה הקוונטית, נובע מכך שהעולם שבו אנו חיים אינו קלאסי.

קישורים:

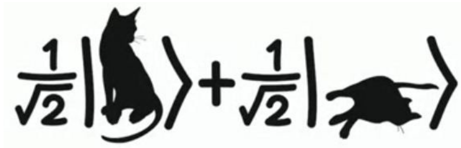
EPR paper
Bell paper

מדידה קוונטית, החתול של שרדינגר

forum link

החתול של שרדינגר הוא ניסוי מחשבתי בתורת הקוואנטים. מטרת הניסוי המחשבתי להוכיח שאם המכניקה הקוונטית תקפה בעולם המיקרוסקופי, אז מן הסתם היא גם תקפה בעולם המקרוסקופי. במילים אחרות אם אפשר לגרום לאטום להיות בסופרפוזיציה של שני מצבים, אז אפשר גם לגרום לחתול להיות בסופרפוזיציה של שני מצבים, ובפרט אפשר ליצור מצב שבו החתול מצוי בסופרפוזיציה של חיים ומוות. הרעיון הוא "לשעתק" מצב סופרפוזיציה של אטום.

מהלך הניסוי: כולאים חתול בתוך קופסא הסגורה לעולם מבחוץ. לא ניתן לצפות במתרחש בתוך הקופסא. בתוך הקופסא יש אטום רדיואקטיבי המשחרר פוטון בעת ההתפרקות. בנוסף יש בקופסא גלאי, ומנגנון הריגה המחובר לגלאי. ברגע שהגלאי מגלה התפרקות, הוא מפעיל את מנגנון ההריגה.

$\Psi =$ 

הכנת אטום במצב סופרפוזיציה

- אטום במצב מעורר: $|\uparrow\rangle$
- אטום במצב היסוד: $|\downarrow\rangle$
- המצב של האטום לאחר "זמן מחצית חיים": $|\Psi\rangle = |\uparrow\rangle + |\downarrow\rangle$

הערה: כשאטום דועך למצב היסוד הוא משחרר פוטון

הכנת חתול במצב סופרפוזיציה

האם ניתן להכין גם חתול בסופרפוזיציה?

- חתול חי: $|u\rangle$
- חתול מת: $|d\rangle$
- סופרפוזיציה: $|\Psi\rangle = |u\rangle + |d\rangle$

מתכון להכנת חתול בסופרפוזיציה של חיים ומוות:

השג אטום במצב מעורר $|\uparrow\rangle$
ארגן מתקן הרעלה: אם האטום "דועך" למצב היסוד הוא משחרר פוטון שגורם לשחרור רעל
שים את החתול החי ביחד עם האטום במתקן $|\uparrow, u\rangle$
אם מחכים הרבה זמן המצב שיתקבל יהיה $|\downarrow, d\rangle$
אם מחכים "זמן מחצית חיים" המצב שמתקבל הוא: $|\Psi\rangle = |\uparrow, u\rangle + |\downarrow, d\rangle$

הערה: למעשה זה לא החתול אלא כל המערכת שנמצאת בסופרפוזיציה.
מודיפיקציה קלה של הניסוי (ראה בהמשך) מאפשרת את קבלת המצב $|\Psi\rangle = |u\rangle + |d\rangle$

האם כשמסתכלים פונקצית הגל קורסת?

לפי פרשנות קופנהגן של תורת הקוונטים, חלקיק יכול להמצא במצב סורפוזיציה של מספר מצבי בסיס מדידים. כאשר מבצעים מדידה החלקיק "קורס" לאחד ממצבי הבסיס. כאשר מנסים לדמיין מצב סופרפוזיציה בעולם המקרוסקופי שבו אנו חיים, קשה לראות איך זה מתקיים, שכן לכאורה אין אנו רואים תפעות כאלו בחיי היומיום. הניסוי המחשבתי ממחיש שאם המכניקה הקוונטית נכונה בעולם המיקרוסקופי אזי היא (כנראה) נכונה גם בעולם המקרוסקופי.

עובדה נסיונית: כאשר פותחים את הקופסא תמיד רואים חתול חי או חתול מת.

שאלה: האם הסופרפוזיציה "קורסת" כאשר מסתכלים עליה?

- מצב של המוח לפני שפותחים את הקופסא: $|\phi\rangle$
- מצב של המוח אם רואים חתול חי: $|+\rangle$
- מצב של המוח אם רואים חתול מת: $|-\rangle$

- מצב היקום לפני שפותחים את הקופסא: $|\Psi\rangle = |\uparrow, u; \phi\rangle + |\downarrow, d; \phi\rangle$
- מצב היקום לאחר שפותחים את הקופסא: $|\Psi\rangle = |\uparrow, u; +\rangle + |\downarrow, d; -\rangle$

מהסתכלות בביטוי זה ניתן לראות כי לעולם לא נוכל להגיע למצב שבו נוכל לראות את החתול גם חי וגם מת. או שניפתח את הקופסא ונחיה בעולם בו אנו רואים את החתול חי, או שנפתח את הקופסא ונחיה בעולם בו אנו רואים את החתול מת. פועל יוצא מזה היא "אינטרפרטציית העולמות המרובים של המכניקה הקוונטית". לפי אינטרפטציה זו כל פעם שמתרחשת אינטראקציה היקום מתפצל למספר יקומים שונים, באשר בכל יקום מתקיימת "היסטוריה" אחרת. לעניות דעתו של המרצה מדובר כאן בסמנטיקה ששייכת לתחום המטפיסיקה, עם השלכות בתחום היצירה הקולנועית.

מודיפיקציה של הניסוי המחשבתי

בניסוי המקורי למעשה לא קיבלנו חתול בסופרפוזיציה. כל המערכת (כולל האטום) היתה בסופרפוזיציה. אם רוצים שרק החתול יהיה בסופרפוזיציה זה אפשרי. לשם כך נחליף את האטום בספין 1/2, ונכין אותו במצב $|\rightarrow\rangle$. לאחר מכן נתזמן אינטראקציה עם מתקן ההרעלה. למתקן יש סנסור שבודק את הקיטוב האנכי. המתקן משחרר רעל אם הספין בכיוון $|\downarrow\rangle$. מצב המערכת יהיה בהתאם:

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\uparrow, u\rangle \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\downarrow, d\rangle$$

עד לשלב זה אין הבדל ביחס לניסוי המקורי (למעט העובדה שמדובר בספין שיכול להסתובב ולא באטום שיכול לדעוך). לצורך המשך הדיון נרשום את המצב בבסיס של מצבי קיטוב אופקי:

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,|\rightarrow, u\rangle \;+\; \frac{1}{2}\,|\leftarrow, u\rangle \;+\; \frac{1}{2}\,|\rightarrow, d\rangle \;-\; \frac{1}{2}\,|\leftarrow, d\rangle$$

עכשיו נפתח את הקופסא ונמדוד את הספין בכיוון האופקי.

- מצב של המוח אם רואים ספין מקוטב ימינה: $|R\rangle$
- מצב של המוח אם רואים ספין מקוטב שמאלה: $|L\rangle$

נקבל סופרפוזיציה של שני תסריטים

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{2}[|\rightarrow, u, R\rangle \;+\; |\rightarrow, d, R\rangle] \;+\; \frac{1}{2}[|\leftarrow, u, L\rangle \;-\; |\leftarrow, d, L\rangle]$$

אם התסריט הוא כזה שראינו ספין מקוטב ימינה, זה אומר שהמצב של המערכת מבחינתנו הוא

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\rightarrow, u\rangle \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\rightarrow, d\rangle$$

זה אומר שהחתול נמצא בסופרפוזיציה של חיים ומוות

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,u\rangle \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,d\rangle$$

אם התסריט הוא כזה שראינו ספין מקוטב שמאלה נקבל

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,u\rangle \;-\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|\,d\rangle$$

שהוא גם מצב של סופרפוזיציה, רק עם פאזה יחסית שונה.

מדוע "הסתכלות" הורסת את הסופרפוזיציה

כאשר "מסתכלים" על אלקטרון שעובר דרך שני סדקים הסופרפוזיציה נהרסת. כדי להבין את התופעה נתיחס לגרסת "שטרן גרלך" של הניסוי. מכינים אלקטרונים עם קיטוב $|\rightarrow\rangle$ ומעבירים אותם דרך מכשיר שטרן גרלך שמוצב אנכית. בתוך המכשיר הספין נע במסלול עילי (y=u) או תחתי (y=d) בהתאם לכיוון הקיטוב האנכי שלו. זה אומר שהמצב של האלקטרון בתוך המכשיר מתואר על ידי

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{\uparrow},u\rangle \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{\downarrow},d\rangle$$

לצורך המשך הדיון נרשום את המצב בבסיס של מצבי קיטוב אופקי:

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,|{\rightarrow},u\rangle \;+\; \frac{1}{2}\,|{\leftarrow},u\rangle \;+\; \frac{1}{2}\,|{\rightarrow},d\rangle \;-\; \frac{1}{2}\,|{\leftarrow},d\rangle$$

כאשר החלקיק יוצר מהמכשיר אנו מקבלים חזרה תנועה לאורך y=0 והמצב התחילי משתחזר

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,|{\rightarrow},0\rangle \;+\; \frac{1}{2}\,|{\leftarrow},0\rangle \;+\; \frac{1}{2}\,|{\rightarrow},0\rangle \;-\; \frac{1}{2}\,|{\leftarrow},0\rangle \;=\; |{\rightarrow},0\rangle$$

אבל אם האלקטרון עושה אינטראקציה עם הסביבה, אז המצב של המערכת, בזמן שהוא בתוך המכשיר, הוא

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{\uparrow},u,+\rangle \;+\; \frac{1}{\sqrt{2}}\,|{\downarrow},d,-\rangle$$

כאשר האלקטרון יוצא מהמכשיר המצב של המערכת יהיה

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{2}\,|{\rightarrow},0,+\rangle \;+\; \frac{1}{2}\,|{\leftarrow},0,+\rangle \;+\; \frac{1}{2}\,|{\rightarrow},0,-\rangle \;-\; \frac{1}{2}\,|{\leftarrow},0,-\rangle$$

אנחנו רואים שכבר לא מתקבל המצב $|{\rightarrow},0\rangle$. כתוצאה מהאינטרקציה עם הסביבה יש עכשיו הסתברות שווה למדידת שני כיווני הקיטוב. צריך להדגיש שמה שחשוב הוא לא "ההסתכלות" כשלעצמה, אלא האינטראקציה שגרמה לכך שהסביבה נכנסה לקורלציה עם מצב החלקיק. במילים אחרות: החלקיק השאיר את חותמו על הסביבה ולכן אין לו אפשרות להתאבך בחזרה עם עצמו.

איך יודעים שהחתול היה במצב סופרפוזיציה

בניסוי שתואר לעיל (אלקטרון שעובר דרך מכשיר שטרן גרלך) יש שני שלבים. שלב ראשון: "שלב פיצול האלומה", שלב שני: "שלב איחוי האלומה". את השלב השני קשה לבצע מבחינה טכנית. אם מדובר בחתול אז תנועה במסלול העילי אנולוגית לחתול חי, ותנועה במסלול התחתי אנלוגית לחתול מת. כדי שהאנולגיה תהיה מושלמת אפשר להניח שהמסלול העילי הוא קו ישר (y=u=0). בשלב הראשון, האינטראקציה בין הספין (האטום) לבין קואורדינטת-המסלול (החתול) גורמת לכך שאם נסתכל נראה בהסתברות של 50% את החלקיק במסלול התחתי (y=d חתול מת). אבל אם לא מסתכלים על הקואורדינטה (החתול), אז אפשר לשקם את המצב התחילי של המערכת. זאת האינדיקציה לכך שבשעת המעבר במכשיר יש סופרפוזיציה או לא. הבעיה הטכנית בהדגמה הניסיונית היא הצורך לבצע "איחוי" של האלומה, מה שאנלוגי להקמת החתול לתחיה. כמו כן ברור שלצורך הסטטיסטיקה צריך לחזור על הניסוי הרבה פעמים (הרבה חתולים ימותו...).

מיחשוב קוונטי (מבוא)

[forum link]

אחת הבעיות המאתגרות שעומדות בפני ממשלות ואירגוני פשע הוא פיצוח שיטת ההצפנה RSA, הידועה גם בשם "שיטת שני המפתחות". בשיטה זו, אם אנו רוצים להצפין מסמך, יש ליצור מפתח "נעילה" ומפתח "פתיחה". שני המפתחות כוללים מספר גדול מאוד N. המספר הזה הוא מכפלה של שני מספרים ראשוניים גדולים p,q שנבחרו אקראית. רק בעל הקוד יודע את שני המספרים p,q בנפרד, בעוד שהמכפלה N ידועה לכולם. אם אתה מסוגל לפרק את N לגורמיו הראשוניים הרי שפיצחת את הקוד.

נתון מספר באורך $n = 400$ ביטים. כמה פעולות דרושות כדי לפרק אותו לגורמים? תשובה: מספר מאוד גדול מסדר גודל של 2^n . לשם השוואה מספר האטומים ביקום הוא מסדר גודל של 2^{300} . שימו לב: למספר 987 יש רק "3" ספרות, אבל נדרשות הרבה פעולות כדי למצוא במה הוא מתחלק. במחשב קוונטי ניתן להכין רגיסטר של n ביטים במצב סופרפוזיציה, לבצע את החישוב באופן "מקבילי" באמצעות יחידת עיבוד אחת. זה מה שמאפשר "לפרק" את המספר לגורמים "במכה אחת". לפרק את המספר = לפצח את הקוד!

פרוק לגורמים

את בעית הפרוק לגורמים אפשר "להמיר" לבעיה שקולה של מציאת מחזור של פונקציה. בהינתן המספר N נגדיר את הפונקציה

$$f(x) \;\equiv\; M^x \bmod(N)$$

באשר M מספר שרירותי. אנו מעונינים למצוא את המחזור r של $f(x)$ עבורו מתקיים

$$f(x+r) = f(x)$$

אם N היה ראשוני אז המחזור של הפונקציה היה $r = N-1$. זה נקרא "המשפט הקטן של פרמה". לעומת זאת אם $N = pq$ אז $r < (N-1)$. אם המחזור r ידוע, אז אפשר לחשב בקלות את גורמיו הראשוניים של N. מה שהמחשב הקוונטי מאפשר זה למצוא את המחזור r. כדי להבין איך זה מתבצע, נגדיר להלן את המושג רגיסטר, ואת הפעולות שנקראות פוריה טרנספורם והדמרד טרנספורם.

רגיסטר

רגיסטר x הוא יחידת זכרון של מחשב, והוא מורכב מביטים (bits). כל ביט יכול להכיל את הערך 0 או 1.

$$x = (x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$$

אופציונלית אפשר לפרש את התוכן של הרגיסטר כיצוג של מספר בינארי:

$$x \;=\; \sum_{i=0}^{n-1} x_i 2^i$$

מכפלה סקלרית של ערכי רגיסטר מוגדרת בצורה הבאה:

$$x^A \cdot x^B \;\equiv\; \sum_i x_i^A x_i^B$$

מכפלה אלגברית של ערכי רגיסטר מוגדרת בצורה הבאה:

$$x^A x^B \;\equiv\; \sum_{ij} x_i^A x_j^B 2^{i+j}$$

ברגיסטר קוונטי יש qbits במקום bits. בשפה של ספינים אפשר להגיד שכל qbit יכול להיות מקוטב up או down, וזה מיצג את הערכים 0 ו-1. בהתאם נסמן את מצב הרגיסטר בסימון $|0\rangle$ או $|1\rangle$. להלן נתיחס לשתי פעולות שלוקחות את הרגיסטר והופכות אותו לסופרפוזיציה של מצבים.

הדמרד טרנספורם

פעולת הדמרד (Hadamard) על qbit יחיד מוגדרת בצורה הבאה:

$$|0\rangle \;\mapsto\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + |1\rangle)$$
$$|1\rangle \;\mapsto\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle - |1\rangle)$$

כלומר qbit מקוטב up יהפוך להיות מקוטב right, ולעומת זאת qbit מקוטב down יהפוך להיות מקוטב left. בשפה של ספינים זו למעשה פעולת סיבוב. שילוב שתי הנוסחאות ביחד נותן את צורת הרישום:

$$|x_0\rangle \;\;\mapsto\;\; \frac{1}{\sqrt{2}}(|0\rangle + (-1)^{x_0}\;|\;1\rangle)$$

או בצורה יותר קומפקטית:

$$|x_0\rangle \;\;\mapsto\;\; \frac{1}{\sqrt{2}}\sum_{k_0=0,1}(-1)^{k_0 x_0}\;|\;k\rangle$$

באופן דומה, עבור רגיסטר בעל qbits 2:

$$|x_0,x_1\rangle \;\;\mapsto\;\; \frac{1}{\sqrt{2^2}}\sum_{\substack{k_0=0,1\\k_1=0,1}}(-1)^{k_0 x_0 + k_1 x_1}\;|\;k_0,k_1\rangle$$

באופן כללי נגדיר טרנספורם הדמרד שפועל על רגיסטר קוונטי בעל n ביטים:

$$|x\rangle \;\;\mapsto\;\; \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{k}(-1)^{k\cdot x}\;|\;k\rangle$$

באשר

$$N = 2^n$$

דוגמא לטרנספורם הדמרד על רגיסטר בעל 3 ביטים:

$$|000\rangle \;\;\mapsto\;\; \frac{1}{\sqrt{2^3}}(|\;0\rangle + |\;1\rangle)(|\;0\rangle + |\;1\rangle)(|\;0\rangle + |\;1\rangle)$$

קיבלנו סופרפוזיציה של כל המצבים האפשריים:

$$|\Psi\rangle \;=\; \frac{1}{\sqrt{2^3}}(|000\rangle + |\;100\rangle + |\;010\rangle + |\;001\rangle + |\;110\rangle + |\;011\rangle + |\;101\rangle + |\;111\rangle)$$

האפשרות להכין סופרפוזיציה כזאת, ואחר כך לפעול עליה "במכה אחת" באמצעות יחידת עיבוד, עומדת בבסיס הקונצפט של מיחשוב קוונטי.

פוריה טרנספורם

טרנספורם פורייה (FT) נותן את רכיבי התדר של פונקציה. לדוגמא: את הצליל שיוצר כלי נגינה אפשר לתאר באמצעות פונקציה של הזמן. הפונקציה מאופינת על ידי ספקטרום תדרים. צליל "נקי" מאופין על ידי פונקציה מחזורית שיש לה תדר בסיסי ותדרים עיליים שהם כפולות שלמות של התדר הבסיסי. לעומת זאת צליל רועש מאופין ברצף של תדרים. מבחינה מתמטית התמרת פוריה מוגדרת באופו הבא:

$$F(\omega) \;=\; \mathrm{FT}[f(t)] \;\equiv\; \frac{1}{\sqrt{N}}\sum_{t} J^{\omega t} f(t)$$

באשר

$$J = e^{i(2\pi/N)}$$

נשים לב שבמקרה של פונקציה מחזורית ההתמרה מחזירה 0, אלא אם כן ω הוא התדר של הפונקציה, או כפולה של התדר הבסיסי.

טרנספורם פורייה קוונטי (QFT) מוגדר באנלוגיה מלאה לטרנספורם הדמרד:

$$|x\rangle \quad \mapsto \quad \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k J^{kx} \mid k\rangle$$

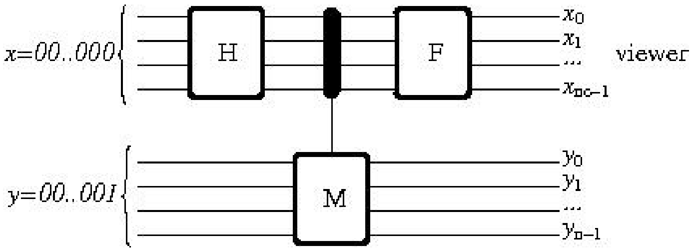
מיחשוב קוונטי (האלגוריתם)

[forum link]

מחשב הוא מערכת שמבצעת פעולה המוכתבת על ידי "הנתונים". הפלט הוא מה שרוצים לחשב:

$$|output\rangle \quad = \quad U[input] \quad |0\rangle$$

להלן תרשים שמתאר את הארכיטקטורה של מחשב קוונטי.



המחשב כולל שני רגיסטרים, ויחידת CPU המסומנת על ידי M. הרגיסטרים הם

$$\begin{aligned} x &= (x_0, x_1, x_2, \ldots, x_{n_c-1}) &= \text{control register} \\ y &= (y_0, y_0, y_2, \ldots, y_{n-1}) &= \text{CPU register} \end{aligned}$$

יחידת ה-CPU מבצעת פעולת כפל

$$y \quad := \quad f(x)\, y$$

באשר הכפל $f(x)$ נקבע על ידי הערך של המספר שיושב ב-control register. הכופל הזה הוא הפונקציה שאת המחזור שלה אנו מעונינים לגלות. בהקשר של פיצוח מפתח ההצפנה של RSA הגדרת הפונקציה מוכתבת על ידי המספר N שאותו רוצים לפרק לגורמים (ראה הרצאת מבוא):

$$f(x) = M^x mod(N)$$

החישוב הקלאסי

הפעלת המחשב במוד פעולה קלאסי כוללת את השלבים הבאים:

בעת הדלקת המחשב מאפסים את הרגיסטר x ואת הרגיסטר y מאתחלים על הערך y=1.
ביחידת הקלט H משנים את מצב רגיסטר x לערך שאותו רוצים לחשב.
מפעילים את יחידת הCPU.
מסתכלים על הפלט ברגיסטר y ועוצרים אם f(x)=1.
על השלבים הקודמים יש לחזור בלולאה על כל המספרים x עד לעצירה
כשהלולאה נעצרת המחזור r שאותו רוצים למצוא רשום ביחידת הפלט F

העובדה שמבצעים חישוב יחיד בכל מחזור פעולה, ועלינו לחזור על הפעולה עבור מספר עצום של ערכי קלט אפשריים, היא זו שמכשילה את המחשב הקלאסי. ההנחה היא ש-N מספיק גדול כך שסדרת הפעולות הזו דורשת זמן ארוך מאוד (אלפי שנים) או לחילופין צריך להשתמש באלפי מחשבים במקביל על מנת לבצע את המשימה. לעומת זאת כפי שנראה להלן במחשב הקוונטי כל הפעולות מתבצעות במקביל בו זמנית, באמצעות מחשב יחיד.

החישוב הקוונטי

הפעלת המחשב במוד פעולה קוונטי כוללת את השלבים הבאים:

בעת הדלקת המחשב מאפסים את הרגיסטר x ואת הרגיסטר y מאתחלים על הערך y=1.
יחידת הקלט H מבצעת טרנספורם הדמדר.
מפעילים את יחידת הCPU.
יחידת הפלט F מבצעת טרנספורם פוריה קוונטי.
התדר k שאותו רוצים לגלות נמדד ביציאה של יחידת הפלט.

על מנת להבין מדוע החישוב הקוונטי "נותן את הסחורה" נעקוב אחרי המצב הקוונטי של המערכת. המצב התחילי הוא

$$|\Psi\rangle \quad = \quad |\,0,0,0,\dots;1,0,0,\dots\rangle \quad = \quad |\,x=0\rangle\ \ |\,y=1\rangle$$

לאחר הפעלת הדמרד נקבל את הסופרפוזיציה

$$|\Psi\rangle \ \ = \ \ \sum_x \ \ |\,x\rangle\ \ |\,y{=}1\rangle$$

לאחר הפעלת ה-CPU נקבל

$$|\Psi\rangle \ \ = \ \ \sum_x \ \ |\,x\rangle\ \ |\,y{=}f(x)\rangle$$

לאחר הפעלת טרנספורם פוריה קוונטי נקבל

$$|\Psi\rangle \ \ = \ \ \sum_x \ \ \left[\sum_k J^{xk}\ |\,k\rangle\right] \ \ |\,f(x)\rangle$$

נארגן מחדש את הביטוי האחרון

$$|\Psi\rangle \ \ = \ \ \sum_k \ \ |\,k\rangle\ \left[\sum_x J^{kx}\ |\,f(x)\rangle\right]$$

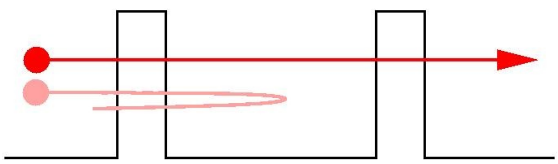
המחשב נמצא בסופרפוזיציה של מצבים. אידיאלית הביטוי בסוגריים המרובעים הוא אפס למעט ערכי k אשר שוים לכפולה כלשהי של תדר הפונקציה f(x). מכאן שאם נמדוד את רגיסטר x נקבל את התדר של הפונקציה (או כפולה של התדר הבסיסי, שזה טוב באותה מידה).

המכשול העיקרי לקראת מימוש טכנולוגי של מחשב קוונטי הוא בידוד המערכת מהסביבה. האינטרקציה עם הסביבה "הורסת" את הסופרפוזיציה.

דינמיקה קוונטית: מעבר מחסומים, מתכות, מוליכים למחצה, דיודות

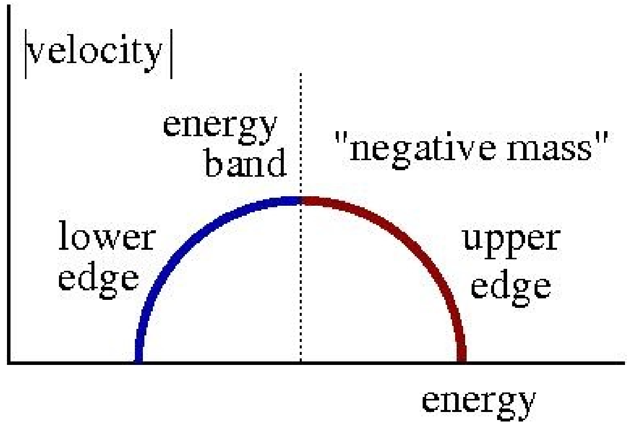
[forum link]

- חלקיק יכול להמצא בו זמנית בשני מקומות.
- כשיש פתח – הוא ינסה לעבור דרכו.
- כשיש שני פתחים – הוא ינסה לעבור בו זמנית דרך שניהם, ולפעמים לא יצליח.
- כשיש מחסום הוא יכול לעבור דרכו ("מינהור").
- לפעמים קל יותר לחלקיק לעבור 2 מחסומים מאשר לעבור מחסום אחד.
- פסי אנרגיה במתכות: אנרגיות שבהן החלקיק "חופשי לנוע"



בפונציאל מחזורי החלקיק חופשי לנוע רק בפסי אנרגיה. יחס הדיספרסיה בכל פס מומחש בציור הבא. בחצי התחתון של הפס החלקיק מתנהג

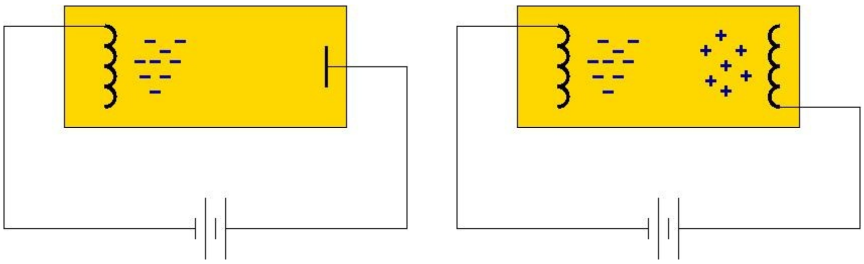
"רגיל", שזה אומר שהמהירות גדלה עם האנרגיה, מכאן שמסת החלקיק היא "חיובית". לעות זאת בחלקו העליון של הפס החלקיק מתנהג כבעל מסה "שלילית". אם יש לנו פס שמלא חלקית רק בחציו התחתון אנו קוראים לו "פס הולכה". אם יש לנו פס כמעט מלא, אנו קואים לו "פס ערכיות". בפס כזה נעדיף להסתכל על "החורים" שמתנהגים כנושאי מטען חיוביים בעלי מסה חיובית.



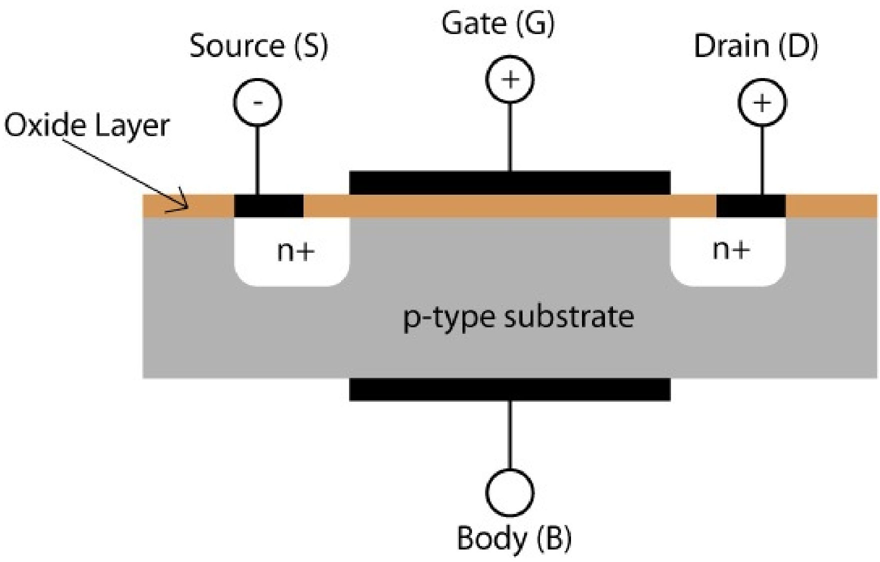
מבנה הפסים הטיפוסי של מוליך למחצה כולל פס ערכיות שיכול לאכלס חורים, פער אנרגטי (gap), ופס ערכיות שיכול לאכלס אלקטרונים. במוליך למחצה "אינטרינסי" מספר האלקטרונים שווה למספר החורים, והכמות של נושאי המטען נקבעת על ידי הטמפרטורה. אם מוסיפים זיהומים (donors, acceptors), אפשר להגדיל את כמות החורים או את כמות האלקטרונים, ובהתאם מדברים על מוליך למחצה מטיפוס p או על מוליך למחצה מטיפוס n. אם יוצרים על-פני מוליך למחצה מטיפוס p שער (gate), אז פוטנציאל חיובי יגרום להתרוקנות (depletion) מנושאי מטען כיוון שהחורים "יידחו" מהשער. אבל אם הפוטנציאל מאוד חזק תיווצר שכבת היפוך (inversion layer) שכוללת נושאי מטען שליליים.

דיודות וטרנזיזטורים

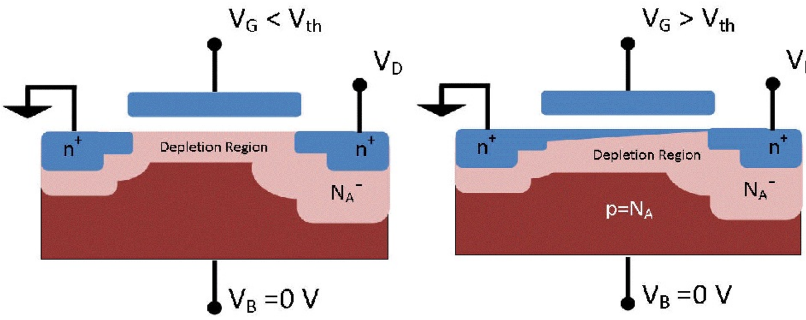
על מנת להבין את עקרון הפעולה של הדיודה נתיחס תחילה לגרסא השפופרתית שלה שכוללת קתודה ואנודה כמתואר בשרטוט. בממתח חיובי האלקטרונים שנפלטים מהקטודה מואצים לעבר האנודה ונוצר זרם. בממתח הפוך כמעט אין זרם. התקן כזה נקרה "יוניפולרי" כיוון שהוא מבוסס על סוג אחד של נושאי מטען (אלקטרונים). אם אפשר היה ליצור אנודה שפולטת נושאי מטען חיוביים (פוזיטרונים), אז היה מתקבל התקן "ביפולרי". אם שמים ממתח חיובי אז במרכז ההתקן יהיה אזור "רקומבינציה", כך שהזרם מהקתודה עד לאיזור הזה הוא בעיקר עם אלקטרונים, בעוד שהזרם באיזור של האנודה הוא בעיקר עם פוזיטרונים. התקן ביפולרי ממומש בפועל על ידי הצמדת מוליך למחצה מסוג n למוליך למחצה מסוג p. זה נקרא p-n junction.



אפשר לתאר טרנזיסטור כרכיב אלקטרוני שאפשר לשלוט על ההתנגדות שלו באמצעות שער (gate). בדומה לשליטה על הזרם בצינור מים באמצעות ברז, זה מאפשר ליצור הן מעגלי מיתוג דיגיטליים, והן מעגלי הגברה אנלוגיים (במקרה האחרון שינויים קטנים במתח השער שולטים על זרם גדול). ישנן מספר דרכים לבנות טרנזיסטור, אך נבחר להרחיב על המבנה של טרנזיסטור מסוג MOSFET, כמתואר בשרטוט.



אם נתעלם מה-gate הרי שיש לנו שתי דיודות מחוברות גב אל גב ולכן לא יכול לזרום זרם בין ה-source לבין ה-drain. על מנת לקבל זרם יש לשים את ה-gate בממתח חיובי מספיק גדול כך שתיווצר שכבת היפוך.



דינמיקה קוונטית: הסחת אלומה על ידי שדה מגנטי - כוח לורנץ ואפקט אהרונוב בוהם

forum link

אלומה שעוברת דרך איזור מרחבי מסוים יכולה לשנות את כיוון תנועתה. יש 3 מסגרות תאורתיות שונות שיכולות להסביר הסחה של אלומה:

- מכניקה ניטונית - ההסחה נובעת מפעולת כוח שמפעיל שדה
- תורת גלים של הויגנס - ההסחה נובעת מאפקט של התאבכות
- תורת הגרביטציה של אינשטיין - המרחב הוא עקום

מה הדרך "הנכונה" להסביר את ההסחה של אלומת אלקטרונים? מנקודת מבט של המכניקה הקוונטית האפקט צריך להיות מובן כנובע מהתאבכות, כמו בתורה של הויגנס. אכן, אנו נראה שלנקודת המבט של המכניקה הקוונטית יש מסקנה לא טריוויאלית, שעומדת בסתירה לפרדיקציה הקלאסית: אפקט אהרונוב בוהם.

נוסחת ההסחה הניוטונית

אם נתבון באלומת חלקיקים טעונים בעוברם בשדה אלקטרומגנטי. הכח הפועל עליהם הוא כח לורנץ:

$$F \;=\; q\mathcal{E} \;-\; q\mathcal{B}\times v$$

F=force, q=charge, E=electricfield, B=magneticfield, v=velocity

נגדיר את המתקף באמצעות הנוסחא

$$\Delta p \;=\; F\Delta t \;=\; \text{Newtonian Impulse}$$

ההסחה בכיוון של האלומה תהיה

$$\theta \;=\; \frac{\Delta p}{p} \;=\; \text{Deflection angle}$$

נוסחת ההסחה של הויגנס

לשם פשטות נתיחס לניסוי שני סדקים. נגדיר את המתקף באמצעות הנוסחא

$$\Delta k \;=\; \frac{\Delta \phi}{d} \;=\; \text{Optical Impulse}$$

להלן נוכיח שההסחה בכיוון של האלומה תהיה

$$\theta \;=\; \frac{\Delta k}{k} \;=\; \text{Deflection angle}$$

ההסבר לנוסחא הוא כדלהלן. אנו מניחים שבאיזור הפיזור (בקרבת שני הסדקים) יש "משהו" שגורם להפרש פאזה $\Delta\varphi$ בין הקרניים ("עדשה"). אם הולכים עם האלומה לעבר המסך יש להוסיף את התרומה של הפרש הדרך האופטית:

$$\phi_2 - \phi_1 \;=\; \Delta\phi \;-\; k\cdot d\cdot\theta$$

העוצמה בנקודת ההתאבכות היא

$$\text{Intensity} \;=\; \left|e^{i\phi_1} + e^{i\phi_2}\right|^2 \;\propto\; (1+\cos(\phi_2-\phi_1))$$

מרכז תמונת ההתאבכות הוא בזוית שבה הפרש הפאזה הוא אפס. מכאן:

$$\theta \;=\; \frac{\Delta\phi}{k\cdot d} \;=\; \frac{k_y}{k}$$

זה מוביל לנוסחת ההסחה של הויגנס. נא לשים לב שאנו מניחים שהאלומה מתקדמת בכיוון ציר x. הפרש פאזה בין שני הסדקים משמעו תנע בכיוון ציר Y.

נוסחת ההסחה הקוונטית

על מנת להסביר את נוסחת ההסחה הקלאסית באופן קוונטי עלינו להניח שהשדות החשמלי וההמגנטי יוצרים הפרש פאזה שיוצר את אותו מתקף כמו מה שמשתמע מנוסחת כוח לורנץ. זה אומר

$$\Delta\phi \;=\; F\Delta t\cdot d \;=\; q\mathcal{E}d\cdot\Delta t \;+\; q\mathcal{B}d\cdot\Delta x$$

באשר

$$\Delta x \;=\; v\Delta t \;=\; \text{displacement}$$

אנו רואים שהאפקט של השדה החשמלי הוא

$$\Delta\phi \;=\; \frac{V_2 - V_1}{\hbar}\Delta t$$

ושהאפקט של השדה המגנטי הוא:

$$\Delta\phi = \frac{q}{\hbar c} \times \mathrm{MageneticFlux}$$

בנוסחאות למעלה כללנו את הקבועים שנחוצים בשיטת היחידות CGS. אנו רואים שהפרש הפאזה תלויה בשטף המגנטי, ולא בשדה המגנטי עצמו. מסקנה המתבקשת מתוצאה זו היא שאפשר להסיח אלומה של אלקטרונים באמצעות שטף מגנטי, גם אם באיזור שבו נעים האלקטרונים אין בכלל שדה מגנטי. הדרך הפשוטה ביותר ליצור קונפיגורציה כזאת היא ליצור שדה מגנטי בתוך סולונאיד, וליצור פוטנציאל חשמלי גבוה מאוד באיזור של הסולונאיד כך שהאלקטרונים לא יכולים לראות את השדה שבתוכו. אם מעבירים אלומה באיזור שבו יש את הסולונאיד, היא נאלצת להתפצל, וההתאבכות תגרום להסחת האלומה. זאת למרות שלפי נוסחת כוח לורנץ לא אמור לפעול על החלקיקים כוח. זה נקרא אפקט אהרונוב בוהם.

גרביטציה, משוואות אינשטיין

[forum link]

הטנזור המטרי

לצורך הגדרת המושג טנזור מטרי נתיחס להלן ליריעות דו מימדיות. אלמנט אורך מיוצג במרחב אוקלידי דו מימדי בקואורדינאטות קרטזיות מוגדר באופן הבא:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2$$

בצורה קומפקטית ניתן לרשום:

$$ds^2 = \sum_{i,j} g_{ij} dx_i dx_j$$

באשר הטנזור המטרי במקרה הקרטזי הוא

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

נתיחס עתה למערכת צירים אחרת על אותה יריעה שבה יש זוית Θ_0 בין ציר x לציר y. ממשפט הקוסינוסים נקבל:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + 2\cos\Theta_0 dxdy$$

כך שהטנזור המטרי הוא:

$$g_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & \cos\Theta_0 \\ \cos\Theta_0 & 1 \end{pmatrix}$$

טרנספורמציות

ראוי להדגיש שאם מחשבים את המרחק בין שתי נקודות על היריעה (x,y) מקבלים אותה תוצאה בכל מערכת צירים. במילים אחרות הגודל ds הוא "אינוריאנטי". עבור קואורדינטות "אורתוגונליות" הטנזור המטרי הוא אלכסוני $ds^2 = dx^2 + dy^2$. טרנספורמצית צירים ששומרת על אורתוגונליות נקראת "סיבוב מערכת צירים". בהמשך נגדיר "מרחק" בין שתי נקודות במערכת צירים (x,t) בצורה $d\tau^2 = dt^2 - dx^2$. טרנספורמציה ששומרת על צורתו של הטנזור המטרי במקרה כזה נקראת "טרנספורמצית לורנץ":

$$\begin{aligned} x' &= \cosh(\tilde{\beta})x - \sinh(\tilde{\beta})t \\ t' &= \cosh(\tilde{\beta})t - \sinh(\tilde{\beta})x \end{aligned}$$

או בנוטציות מקובלות יותר

$$\begin{aligned} x' &= \gamma\,(x - \beta t) \\ t' &= \gamma\,(t - \beta x) \end{aligned}$$

$$\gamma \equiv (1-\beta^2)^{-1/2}$$

טנזור מטרי של מרחב עקמומי

הדוגמה הכי פשוטה למרחב עקמומי היא יריעה כדורית:

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2\theta d\varphi^2$$

כך שהטנזור המטרי הוא:

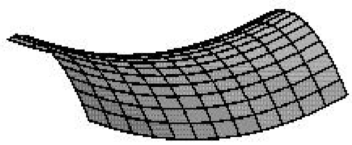
$$g_{ij} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2\sin^2(\theta) \end{pmatrix}$$

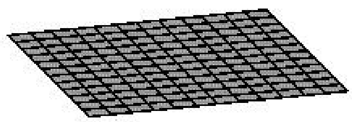
נוח להגדיר קואורדינטת מרחק מהקוטב הצפוני $r = R\sin\theta$.
הביטוי עבור אלמנט האורך מקבל את הצורה

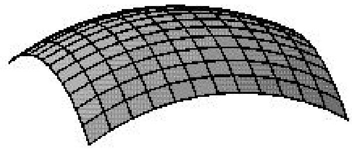
$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2 d\varphi^2$$

באשר העקמומיות היא

$$K = \frac{1}{R^2}$$







ההכללה למרחב תלת מימדי, בקואורדינטות כדוריות, היא

$$ds^2 = \frac{dr^2}{1-Kr^2} + r^2\left(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2\right)$$

המקרה K=0 מתאר מרחב שטוח.
המקרה K>0 מתאר מרחב עם עקמומיות חיובית.
המקרה K<0 מתאר מרחב עם עקמומיות שלילית.

כדאי לשים לב: קו ישר על פני יריעה כדורית הוא למעשה מעגל גדול. סכום הזויות במשולש שמציירים על פני יריעה כדורית הוא גדול מ-180 מעלות. לעומת זאת על פני יריעה עם עקמומיות שלילית הסכום יהיה קטן מ-180 מעלות. אם נצייר עיגול על פני יריעה דו מימדית, הקשר בין השטח

להיקף נקבע על ידי העקמומיות של היריעה. אם יש לנו כדור במרחב תלת מימדי, הקשר בין נפח הכדור לשטח פניו תלוי בעקמומיות של המרחב.

[Curvature](#)
[Gaussian curvature](#)
[Scalar curvature](#)
[Curvature of Riemannian manifolds](#)

טנזור מטרי של המרחב הפיסיקלי

בתורת הגרביטציה אנו רואים את המרחב כארבע מימדי:

$$x^\mu \;=\; (t, x, y, z)$$

את המרחק בין שתי נקודות שאחת מצויה "בעבר" והשניה "בעתיד" נגדיר בצורה הבאה:

$$d\tau^2 \;=\; dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2 \;=\; \sum_{\mu,\nu} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$$

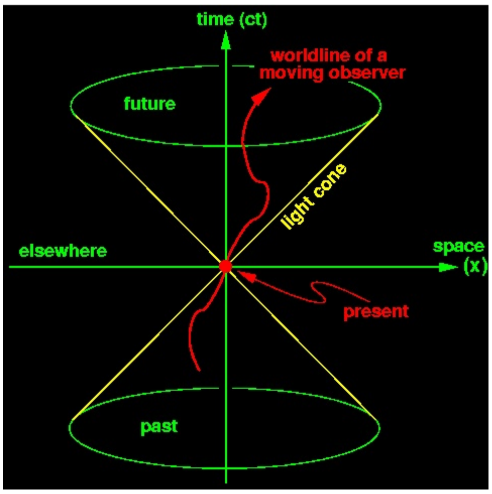
כך שהטנזור המטרי הוא:

$$g_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

המוטיבציה להגדרה של "מרחק" בצורה הזו היא שהגודל $d\tau$ אמור להיות מוגדר אינוריאנטית בכל מערכות היחוס. בפרט נשים לב שעבור חלקיק הנע במהירות האור מתקיים $d\tau = 0$ לאורך המסלול, ולכן דרישת האינוריאנטיות אומרת שהאור אמור לנוע באותה מהירות בכל מערכות הייחוס. אם חלקיק נע במהירות נמוכה יותר ממהירות האור אז מתקיים $d\tau^2 = dt^2 - (vdt)^2$ ולכן

$$dt \;=\; \frac{d\tau}{\sqrt{1-v^2}}$$

זאת נקראת תופעת "התארכות הזמן". מכאן ברור שהמרחק הזמני $d\tau$ בין שתי נקודות על מסלול של חלקיק למעשה מודד את הזמן שעובר במערכת החלקיק. במערכת המעבדה מודדים זמן ארוך יותר ("התארכות הזמן"). את התנועה של חלקיק במערכת המעבדה אפשר להמחיש כמתואר בציור הבא:



הטנסור המטרי של רוברסטון-וולקר

הטנסור המטרי שמתאר מרחב פיסיקלי בעל עקמומיות K הוא

$$d\tau^2 \;=\; dt^2 \;-\; a(t)^2\left[\frac{dr^2}{1-Kr^2} \;+\; r^2\left(d\theta^2 \;+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

בביטוי זה אפשר לכייל את יחידות המרחק כך שברגע מסוים (ההווה) מקדם הסקאלה יהיה $a(t_0) = 1$.
אם K=0 אנו מקבלים חזרה את הביטוי הרגיל שמתאר מרחב שטוח ("תורת היחסות הפרטית").

The Friedmann-Lemaitre-Robertson-Walker metric

משוואת אינשטיין.

ניוטון סבר שהתנועה של כדור הארץ סביס השמש נובעת מכוח שהשמש מפעילה על כדור הארץ. אם נשתמש ביחידות שבהם קבוע הגרביטציה שווה לאחד, אז "חוק הגרביטציה העולמי" של ניוטון אומר למעשה שהשמש יוצרת במרחב פוטנציאל

$$V(r) \;=\; -\frac{M}{r}$$

באנלוגיה למשוואת פואסון-לפלס באלקטרוסטטיקה אנו מצפים שפוטנציאל הגרביטציה יקיים את המשוואה הבאה:

$$\nabla^2 V \;=\; -4\pi\rho_M$$

באשר ρ_M היא צפיפות המסה במרחב.

אינשטיין ראה בגרביטציה תופעה גאומטרית. מה שמסביר את תנועת כדור הארץ זה לא "כוח גרביטציה" בגין קיומו של פוטנציאל $V(x)$, אלא העקמומיות של המרחב אשר משתקפת בטנזור המטרי $g_{\mu\nu}(x)$. משוואת אינשטיין היא

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}$$

באשר אגף ימין הוא טנזור צפיפות האנרגיה שמביע את צפיפות החומר ביקום, ואגף שמאל הוא טנסור העקמומיות של אינשטיין שמוגדר באמצעות הטנסורהמטרי. במילים אחרות המסה "מעקמת" את המרחב. לפתור את משוואת אינשטיין זה אומר להניח פיזור מסוים של מסה (לדוגמה מסה נקודתית), ואז למצוא מתוך המשוואה את הטנזור המטרי $g_{\mu\nu}(x)$ שמתאר את המרחב (ראה דוגמאות בהמשך). כאשר האפקט הגריבטציוני הוא חלש אפשר להראות שהפתרון של משוואת אינשטיין הוא

$$g_{00}(x) \;\approx\; 1 + 2V(x)$$

באשר $V(x)$ הוא הפתרון של משוואת פואסון-לפלס, ז"א הפוטנציאל שמופיע בתאוריה של ניוטון. במקרה כזה אפשר להראות שמשוואות התנועה של חלקיק במרחב מקיימות בקרוב טוב את "החוק השני של ניוטון". בשדה גרביטציה חלש שתי התאוריות מתלכדות.

טנזור צפיפות האנרגיה

אם נניח שהחומר ביקום הוא כמו נוזל המאופין בצפיפות מסה ρ_M , לחץ p, ומהירות u, אז הביטוי לטנסור צפיפות האנרגיה הוא

$$T_{\mu\nu} \;=\; (\rho_M + p)u_\mu u_\nu + pg_{\mu\nu}$$

אם הנוזל במנוחה אז הביטוי המתקבל הוא פשוט ביותר:

$$T_{\mu\nu} \;=\; \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -p \end{pmatrix}$$

התרמודינמיקה מספקת קשר בין הלחץ לבין צפיפות המסה. במקרים פשוטים היחס הוא לינארי:

$$p_M \;=\; w\rho_M$$

לדוגמה, במקרה של קרינה $w = 1/3$. להלן נתיחס למושג "אנרגיה אפלה" שמאופינת על ידי משוואת מצב עם $w = -1$. מבחינה היסטורית אינשטיין ראה שאפשר להוסיף למשוואה שלו איבר "קוסמולוגי" מהצורה $\Lambda g_{\mu\nu}$. איבר כזה כמעט לא משפיע על הפתרון של בעיית קפלר, אבל יש לו חשיבות כשמנסים לפתור את משוואות אינשטיין עבור היקום כולו: אינשטיין רצה שהפתרון יהיה סטאטי. אפשר לבלוע את האיבר הזה לתוך ההגדרה של טנזור צפיפות האנרגיה. לשם כך עלינו להניח שהיקום מלא באנרגיה אפלה שהצפיפות והלחץ שלה הם

$$\rho_\Lambda \;=\; \frac{1}{8\pi}\Lambda$$
$$p_\Lambda \;=\; -\frac{1}{8\pi}\Lambda$$

האינטרפטציה המקובלת של "האנרגיה האפלה" היא קוונטית: היא משקפת את הפלקטואציות של הואקום.

המרחב סביב מסה נקודתית

שוורצשילד הציג פתרון למשוואת איינשטיין עבור מסה נקודתית. הטנזור המטרי הוא

$$d\tau^2 \;=\; \left(1-\frac{r_s}{r}\right)dt^2 \;-\; \left[\frac{dr^2}{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)} \;+\; r^2\left(d\theta^2 \;+\sin^2\theta d\varphi^2\right)\right]$$

באשר רדיוס שוורצשילד נקבע על ידי המסה (בבטוי להלן כללנו את קבוע הגרביטציה ואת מהירות האור):

$$r_s \;=\; \frac{2G}{c^2}M$$

נשים לב שמתקיים הקשר הצפוי מראש בין הטנסור המטרי לפוטנציאל של ניוטון

$$g_{00}(x) \;=\; 1-2\frac{M}{r}$$

כפי שכבר הסברנו, "משוואות התנועה" של חלקיק שנמצא במרחב נקבעות בתאוריה של ניוטון על ידי הפוטנציאל הגרביטציוני , ובתאוריה של אינשטיין על ידי הטנסור המטרי . מחוץ לרדיוס שוורצשילד, איפה שהפוטנציאל הוא "חלש", משוואות התנועה שנגזרות מהפתרון של שוורצשילד דומות למשוואות התנועה של ניוטון: זה אומר שמקבלים מהם תנועה קפלרית, כמו תנועת כדור הארץ במרחב סביב השמש. להלן נתאר מה קורה כשמתקרבים לרדיוס שוורצשילד - רדיוס זה מגדיר את "אופק הארועים" שמעבר אליו לא ניתן "לראות".

את אפשרות התנועה של חלקיק במרחב אפשר להמחיש באמצעות "קונוסים". בקואורדינטות של שוורצשילד ככל שמתקרבים לאופק הארועים כך מהירות האור נמוכה יותר:

$$c(r) \;=\; 1-\frac{r_s}{r}$$

מנקודת מבט של צופה חיצוני כדור שנזרק לכיוון של חור שחור לעולם לא יחצה את האופק שלו. אפילו אם הכדור נע במהירות שקרובה למהירות האור זמן ההגעה לרדיוס שוורצשילד הוא אינסופי:

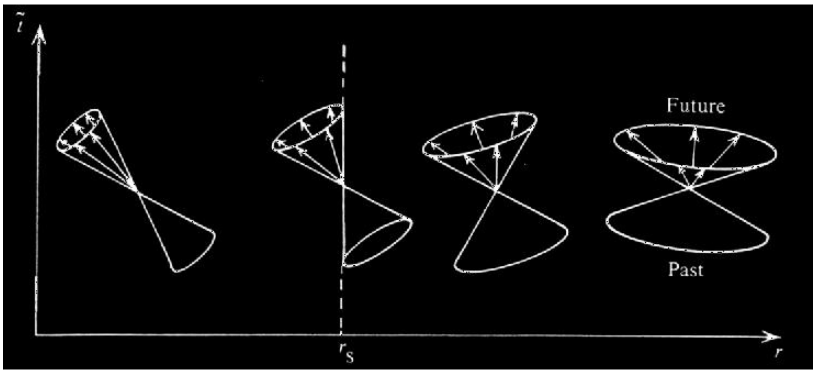
$$t \;=\; \int_{r_s}^{r}\frac{dr'}{c(r')} \;=\; \infty$$

אבל למעשה מבחינה מתמטית שום דבר מיוחד לא קורה באופק. אם עוברים למערכת היחוס של הכדור מתברר שהזמן שלוקח לחצות את האופק הוא סופי. נניח לדוגמה שהכדור נע בחצי ממהירות האור. במקרה כזה הזמן להגיע לרדיוס שוורצשילד הוא:

$$\tau \;=\; \int_{r_s}^{r}\sqrt{\left(1-\frac{r_s}{r}\right)\left[\frac{dr}{(1/2)c(r)}\right]^2 \;-\; \frac{dr^2}{1-\frac{r_s}{r}}} \;=\; \sqrt{3}\int_{r_s}^{r}\frac{dr'}{\sqrt{c(r')}} \;<\; \infty$$

למעשה שום דבר מיוחד לא קורה לצופה שחוצה את אופק הארועים. אנלוגיה: בנהר שהולך וצר מהירות הזרימה הופכת להיות גדולה יותר ככל

שמתקדמים, וקיימת נקודה מסוימת שממנה והלאה שחיינים לא יכולים לחזור. על מנת לשקף את הגאומטריה של המרחב נהוג להשתמש בקואורדינת "זמן" גלובאלית, כמודגם בציור להלן. מתחת לרדיוס שווארשילד כיוון התנועה הוא בהכרח כלפי המרכז (רדיוס קטן יותר = עתיד).



חור שחור

"חור שחור" הוא כוכב שהרדיוס שלו קטן מרדיוס שווארצשילד. במילים אחרות: מנקודת מבט של צופה חיצוני הכוכב נמצא אחרי אופק הארועים. חלקיקים ואור לא יכולים להימלט משדה הגרוויטציה של חור שחור. זה משתמע מהדיון בפתרון של שווארצשילד. על מנת להבין טוב יותר את הטענה הזאת, ננסה לפרש את רדיוס שוורצשילד בצורה פשוטה יותר. נניח שיש לנו טיל המשוגר לחלל מכדור הארץ. הטיל מושפע משדה הכבידה של כדור הארץ, ולכן נדרשת מהירות מילוט מסוימת, שתאפשר לגוף להשתחרר משדה הכבידה. במסגרת המכניקה הניוטונית אפשר למצוא את מהירות המילוט מתוך המשוואה

$$\frac{mv^2}{2} = \frac{GMm}{r}$$

באשר r הוא רדיוס הכוכב, M היא מסת הכוכב, ובאשר m היא מסת הטיל. נקבל

$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

עכשיו אפשר לשאול עבור איזה רדיוס מהירות המילוט שנדרשת שווה למהירותהאור. מה שנקבל זה את רדיוס שווארצשילד. לפי ניוטון, אם רדיוס הכוכב קטן מרדיוס שווארצשילד החללית זקוקה למהירות יותר גדולה ממהירות האור כדי לברוח. לפי אינשטיין, אי אפשר להימלט מכוכב כזה. מזה כביכול נובע שאי אפשר לראות חורים שחורים. למעשה סטיבן הוקינג הראה ב-1974, שחורים שחורים פולטים קרינה. שחרור זה של אנרגיה, שגורם לירידה במסה של החור השחור, נקרא קרינת הוקינג.

http://en.wikipedia.org/wiki/Black_hole
http://en.wikipedia.org/wiki/Schwarzschild_coordinates
http://en.wikipedia.org/wiki/Eddington-Finkelstein_coordinates
http://en.wikipedia.org/wiki/Event_horizon
http://en.wikipedia.org/wiki/Hawking_radiation

קוסמולוגיה

Friedmann equations - Wiki
Cosmic dynamics - lecture notes

פתרון מעניין נוסף של משוואות איינשטין מתייחס לטנסור המטרי של היקום כולו. נניח שהיקום מלא במסה בצפיפות אחידה. נחפש פתרון שמתתאר על ידי הטנסור המטרי של רוברסטון-וולקר. הנעלמים הם העקמומיות של המרחב K והתלות בזמן של פקטור הסקאלה $a(t)$. נדגיש מראש שתצפיות אסטרונומיות מאפשרות "למדוד" את גדלים אלה. מתוך משוואות אינשטיין נקבל את משוואות פרידמן:

$$3\frac{\dot{a}^2 + K}{a^2} \;=\; 8\pi\rho$$

$$\frac{2\ddot{a}a+\dot{a}^2+K}{a^2} \;=\; -8\pi p$$

מכאן מקבלים משוואות עבור הקצב והתאוצה של התפשטות היקום:

$$\frac{\dot{a}^2+K}{a^2} \;=\; \frac{8\pi}{3}\rho$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} \;=\; -\frac{8\pi}{6}(\rho+3p)$$

המשוואה הראשונה קושרת בין צפיפות האנרגיה ביקום לבין קצב ההתפשטות שלו. המשוואה השניה קובעת את הקצב שבו ההתפשטות מואטת או מואצת. אם גוזרים את המשוואה הראשונה ומחסירים אותה מהמשוואה השניה מקבלים נוסחא עבור הקצב שבו משתנה צפיפות האנרגיה ביקום:

$$\dot{\rho} \;=\; -3\frac{\dot{a}}{a}(\rho+p)$$

להלן נגדיר את הנפח, המסה, והאנרגיה של היקום בצורה הבאה:

$$V=\frac{4\pi}{3}a^3, \quad E=M=V\rho$$

את המשוואה הראשונה של פרידמן אפשר לרשום בצורה שמזכירה את חוקי הדינמיקה הניוטונית:

$$\frac{1}{2}M\dot{a}^2 \;-\; \frac{M^2}{a} \;=\; const$$

את קצב שינוי צפיפות האנרגיה אפשר לבטא באמצעות קצב שינוי המימדים של היקום. כאשר היקום מתפשט הלחץ עושה "עבודה" ולכן האנרגיה של היקום קטנה $dE=-pdV$. זה מוביל לקשר $d\rho=-(\rho+p)\dfrac{dV}{V}$ ומכאן מתקבלת המשוואה עבור $\dot{\rho}$.

הקבוע הקוסמולוגי

לקבוע הקוסמולוגי של אינשטיין אפשר לפרש כאנרגיה "אפלה" בעלת צפיפות $\rho=\Lambda/(8\pi)$ שממלאת את הואקום. לפי האינטרפטציה המקובלת זה משקף פלקטואציות קוונטיות של הואקום. אם מגדילים את הנפח של היקום האנרגיה האפלה שלו גדלה בהתאם $dE=+[\Lambda/(8\pi)]dV$. זה אומר שיש לייחס לאנרגיה האפלה לחץ שלילי $p=-\Lambda/(8\pi)$. לחץ שנובע מפלקטואציות של הואקום נקרא "אפקט קזימיר". אנו נרחיב לגבי אפקט קזימיר בהמשך, תוך התיחסות לאספקט אחר (מספר המימדים של היקום). נרשום את מישוואות פרידמן תוך אבחנה בין צפיפות "החומר" לבין "האנרגיה האפלה"

$$\frac{\dot{a}^2+K}{a^2} \;=\; \frac{8\pi}{3}\rho_M \;+\; \frac{1}{3}\Lambda$$

$$\frac{\ddot{a}}{a} \;=\; -\frac{8\pi}{6}(\rho_M+3p_M) \;+\; \frac{1}{3}\Lambda$$

נשים לב שחומר "רגיל" מאיט את קצב ההתפשטות של היקום, בעוד שאנרגיה אפלה מאיצה את קצב ההתפשטות של היקום. במקור אינשטיין הציע להוסיף את הקבוע הקוסמולוגי למשוואה שלו, כיוון שהוא האמין שהיקום אמור להיות סטאטי. בהמשך, כאשר האבל גילה שהיקום מתפשט אינשטיין תיאר את הרעיון שלו במילים "the biggest blunder of his life". אבל כיום מהתצפיות האסטרונומיות נובע שיש להניח שהאנגיה האפלה היא למעשה 70% מהאנרגיה ביקום.

הפרמטר של האבל

בטנסור של רוברסטון-וולקר יש שני גדלים שניתן לקבוע אותם על סמך תצפיות אסטרונומיות: העקמומיות ופקטור הסקאלה. מדידות של קרינת הרקע הקוסמית מעידות על כך שעקמומיות המרחב היא קרובה לאפס. את התפשטות היקום מתארים באמצעות הפרמטר של האבל:

$$H \;=\; \text{Hubble parameter} \;\equiv\; \frac{\dot{a}}{a}$$

מבחינה תצפיתית פרמטר זה קובע את היחס בין מהירות ההתרחקות לבין המרחק של שתי גלאקסיות (לגלאקסיות רחוקות יש מהירות התרחקות גבוהה יותר). על ידי הצבת הערך הנמדד של H במשוואה הראשונה של פרידמן, אפשר לקבל מה אמורה להיות צפיפות האנרגיה ביקום. בנוסף, מהמדידות האסטרונומיות של H עבור גלאקסיות רחוקות, אפשר להסיק שקצב ההתפשטות של היקום מואץ. זה מוביל, על סמך המשוואה השניה של פרידמן, למסקנה שכ-70% מהאנרגיה ביקום היא למעשה "אנרגיה אפלה". השאר זה "חומר", שבחלקו הגדול לא ניתן לראות באמצעות טלסקופים, אבל האופן שבו מאורגנות הגלאקסיות מעידות על קיומו.

סקאלת האורך של פלאנק

עד עכשיו תארנו את הגרביטציה במסגרת של הפיסיקה הקלאסית. נשאלת השאלה מה סקאלת האורך שבה לא ניתן להתעלם מאפקטים קוונטיים. את סקאלה זו ניתן לקבוע באמצעות השיקול הבא. נניח שאנו מודדים את הזמן ביחידות סטנדרטיות seconds. את האורך אנו גם מודדים ב-seconds כך שמהירות האור שווה לאחד, ומכאן שיחידות המסה במסגרת המכניקה הקוונטית הן 1/second (במילים אחרות גם קבוע פלאנק שווה לאחד). במערכת זו של יחידות פיסיקליות קבוע הגרביטציה הוא

$$G \;=\; \frac{\hbar}{c^5} G_{\text{standard units}} \;=\; \left(5.4 \cdot 10^{-44}\ sec\right)^2$$

אנחנו רואים שקבוע הגרביטציה מגדיר סקאלת אורך "טבעית" שנקראת סקאלת האורך של פלאנק. על מנת להבין את המשמעות של הסקלה הזו נדמיין שאנחנו כולאים פוטון באזור מרחבי שהרדיוס שלו R. המאסה הגרביטציונית של הפוטון שווה לאנרגיה שלו, אשר נקבעת לפי אורך הגל שלו:

$$M \;=\; E \;=\; \omega \;=\; |\,k\,| \;\sim\; \frac{1}{R}$$

על מנת שיהיה אפשר "לראות" את הפוטון, רדיוס שוורצילד שלו צריך להיותקטן יותר מהרדיוס שבו הוא כלוא. אחרת הוא הופך להיות חור שחור. אוביקט הופך להיות "חור שחור" אם הרדיוס שלו קטן מרדיוס-שווארשילד שנקבע על ידי המסה שלו:

$$R \;<\; r_s = 2GM$$

מכאן מקבלים שהפוטון הממוקם יהפוך להיות "בלתי נראה" אם אורך הגל שלו

$$R \;<\; \sqrt{G} \equiv \text{Plank Length}$$

אגב, המסה של פלאנק היא בערך כמו המסה של גרגיר חול

$$\text{Plank Mass} \;=\; \frac{1}{\text{Planck Length}} \;=\; 2.2 \cdot 10^{-8}\ kg$$

אפקט קזימיר

האפקט הזה מתייחס לכוח המשיכה שקיים בין שני לוחות בגין הקוונטיזציה של המודים האלקטרומגנטיים (ראה ציור). זה אנלוגי לכוח המשיכה בין שתי אוניות בגלל גלים עומדים שנוצרים ביניהם. נתבסס על הנוסחא של אנרגית אוסצילטור:

$$E_\nu^{(n)} \;=\; \left(\frac{1}{2} + \nu\right) \hbar\omega_n, \qquad \nu = 0 = \text{vacuum}$$

נסכם את אנרגית הואקום של כל המודים

$$\omega_n \;=\; n\omega_\perp \;=\; n\frac{\pi}{d}$$

נקבל שהאנרגיה הכוללת של מצב היסוד היא שלילית (לכן הלוחות מושכים זה את זה).
החישוב מוצג להלן. נשים לב שאנרגית היחוס היא במצב שבו הלוחות במרחק אינסופי אחד מהשני.

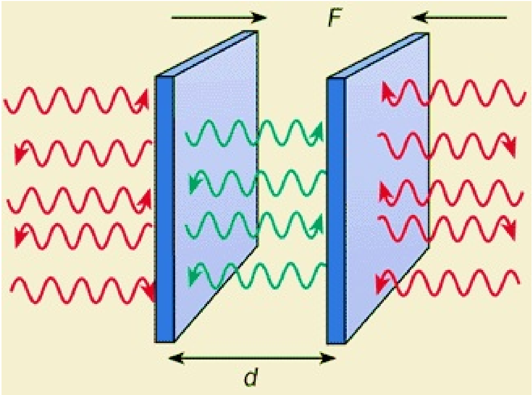
$$E(\infty) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\hbar\left(n\frac{\pi}{L}\right) = \frac{L}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\hbar\omega d\omega$$

$$E(d) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}\hbar\left(n\frac{\pi}{d}\right) + \frac{L-d}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{1}{2}\hbar\omega d\omega$$

$$E(d)-E(\infty) = \frac{1}{2}\left[\sum_{n=1}^{\infty} n - \int_0^{\infty} ndn\right]\hbar\omega_{\perp} \approx -\frac{1}{24}\hbar\omega_{\perp}$$

על מנת לבצע את החישוב מכניסים אקספוננט דועך, מבצעים את הסכום ואת האינטגרל, ומשאיפים את קבוע הדעיכה לאפס.

Wikipedia: $1+2+3+4+\cdots = -\frac{1}{12}$



כמה מימדים יש למרחב הפיסיקלי?

לכאורה למרחב הפיסיקאלי יש 4 מימדים: מימד אחד של זמן ועוד שלושה מימדים של אורך. שיקול מתמטי ספקולטיבי של "תורת המיתרים" מוביל למסקנה שלמרחב הפיסקלי יש 10 מימדים. ההסבר הפורמאלי של מדוע צריך את תורת המיתרים, ומדוע צריכים 10 מימדים, יאמר להלן, אבל הוא לא מאיר עיניים. לכן בהמשך ננסה להסביר את המשמעות של הטענה על ידי שימוש באנלוגיה לפיסיקה של סיבים אופטיים...

תורת המיתרים: דיראק הראה שאם רוצים לנסח מכניקה-קוונטית במסגרת "יחסות פרטית" עבור אוביקט *נקודתי* , אז האוביקט הזה חייב להיות בעל ספין, והוא חייב ליצג את האפשרות שהוא יהיה "חלקיק" או "אנטי חלקיק" בהתאם לאופן שבו מעוררים אותו. מתברר אם רוצים לנסח מכניקה-קוונטית במסגרת "יחסות כללית" (הבסיס של אינשטיין לתורת הגרביטציה) אז האוביקט הזה חייב להיות " *מיתר* " בעל אורך סופי (אחרת החישובים "מתפוצצים"). להלן נסמן את אורך המיתר בסימון d , ונניח שהוא מסדר גודל של אורך פלאנק. מתברר שעל מנת לשמור על עקרונות היחסות עבור "מיתר", המרחב חייב להיות בעל מספר מסוים של מימדים (ראה פרוט נוסף בהמשך). הספקולציה היא שהחלקיקים שאנו מוצאים במודל-הסטדנרטי הם עירורים שונים של אותו אוביקט מתמטי: זה אומר שאם יוצרים/מעוררים מיתר בצורה אחת מקבלים "פוטון", ואם יוצרים/מעוררים מיתר בצורה אחרת מקבלים "אלקטרון".

מימדים נוספים: נניח שאנו מסתכלים על האוקיאנוס ממרחק גדול. מה שאנו רואים זה משטח דו מימדי שעל פניו נעים אוביקטים שלהם אנו קוראים "גלים". אם מסתכלים יותר מקרוב מבינים שהגלים הם למעשה אכסיטציות שקימות בגלל שיש מימד שלישי (אנכי). אפשר להגיד שמבחינה מתמטית האוקיאנוס הוא יריעה תלת מימדית עם שני מימדים "רחבים" ומימד אחד "דק". באנלוגיה אנו יכולים לשער שאולי "הפוטונים" שקימים במרחב הפיסיקלי הם למעשה אכסיטציות של מימד נוסף שיש למרחב. באופן כללי יותר אפשר לשער שכל "החומר" שמופיע במודל הסטנדרטי נובע מאכסיטציות של מימדים נוספים "דקים". במבט ראשון אפשר לחשוב שמספר המימדים הנוספים של המרחב הפיסיקאלי צריך לשקף את מספר השדות שיש במודל הסטדנדרטי: שדות בוזוניים (פוטונים, גלואונים) ושדות פרמיוניים (קווארקים ולפטונים). אבל המכניקה הקוונטית מראה שבתאוריה קונסיסטנטית מספר המימדים של המרחב הפיסקאלי חייב להיות 10. אם היו במודל הסטנדרטי רק בוזונים מספר המימדים של המרחב הפיסקאלי היה חייב להיות 26. את המספר הזה נסביר להלן.

מסה של פוטון: כדי ליצור חלקיק במרחב דרושה אנרגיה. האנרגיה הזו מורכבת ממסת המנוחה פלוס אנרגיה קינטית. להלן נסביר שמסת המנוחה של הפוטון במסגרת תורת-המיתרים היא

$$m \;=\; \left\{1[\text{quanta}] \;-\; \frac{D}{24}[\text{casimir}]\right\}\hbar\omega_{\perp}$$

ונדרוש שהיא תהיה אפס. הדרישה $m=0$ מובילה למסקנה שלמרחב צריכים להיות 26 מימדים: מימד אחד של זמן, מימד אחד של אורך בכיוון תנועת הפוטון, ועוד $D=24$ מימדים נוספים. לצורך ההסבר של הנוסחא נשים לב שאותו אפקט קיים בסיבים אופטיים. עירור של תנודה אלקטרומגנטית בעלת תנע k בסיב אופטי בעל עובי d כרוך בתשלום מינימלי $\omega_{\perp}=\pi/d$ שנובע מקיומה של דרגת החופש הטרנסורסלית. את התשלום הזה אפשר לפרש כמסת מנוחה של הפוטון שנע לאורך הסיב:

$$\epsilon \;=\; |\,\vec{k}\,| \;=\; \sqrt{\left(\frac{\pi}{d}\right)^2+(k_{\parallel})^2} \;\equiv\; \sqrt{m^2+p^2}$$

זה מסביר את האיבר הראשון בנוסחא של תורת המיתרים. נסביר עכישו את האיבר השני. במסגרת תורת-המיתרים הפוטון הוא מיתר שעוררו אותו. מהמחיר $\hbar\omega_{\perp}$ של יצירת הערור יש להחסיר את הרווח האנרגטי שכרוך ביצירת המיתר. כאשר יוצרים מיתר בעל אורך d באזור מרחבי מסוים, זה כמו ליצור גאומטרית קזימיר בכיוון הטרנסורסלי (בכיוון המאונך לכיוון תנועתו). את התוצאה שמצאנו באנליזה של אפקט קזימיר יש להכפיל במספר המימדים הטרנסורסלים D. אנו דורשים שהסכום m (המחיר של העירור לאחר הנחה) יהיה שווה לאפס: זה מוביל למסקנה $D=24$.

[David Tong: Lectures on String Theory [arXiv]]

הערה על רנורמליזציה

ההערה להלן חורגת מרמת הקורס ואני רושם אותה לצורך שלמות הסקירה.

כאשר מנסים לחשב חתכי פעולה של פיזורים במסגרת "מודל סטנדרטי" של חלקיקים נקודתיים מופיעים בחישוב אינטגרלים מתבדרים. על מנת למנוע את ההתבדרות יש להכניס cutoff, זה אומר להתיחס לחלקיק כאילו הוא בעל גודל סופי (או לחילופין כאילו למרחב יש רזולוציה סופית). התשובה הסופית לא אמורה להיות תלויה ב-cutoff. הסכמה המתמטית לביצוע החישוב נקראת "רנורמליזציה".

המודל הסטנדרטי הוא "בסדר" מבחינת רנורמליזציה. זה הודות לכך שבמודל "הערום" (ללא אינטראקציות) יש לכל החלקיקים מסה אפס. המסה הסופית של החלקיקים מושגת כאשר מוסיפים את האינטראקציה בגלל "שבירת סימטריה". זה נקרא מנגנון היגס . אחד מההשגים החשובים של הפיסיקה הניסיונית בעשור האחרון היה לודא את קיומם של חלקיקי היגס שהם תוצר נלווה של שבירת הסימטריה.

אבל אם מנסים לקחת בחשבון גרביטציה אז יש צרות. תורת הגרביטציה היא "לא בסדר" מבחינת רנורמליזציה. הבעיה קשורה לכך שיש את סקאלת פלאנק . כל חישוב שדורש רזולוציה גבוהה יותר מתפוצץ. הפתרון לכך הוא להניח שהחלקיקים האלמנטריים הם לא אוביקטים נקודתיים אלא "מיתרים". הודות לספקולציה זו, הבעיה של הרנורמליזציה הופכת להיות בלתי רלונטית.

מצד שני התאור הקוונטי של מיתר הוא מסובך יותר מהתאור הקוונטי של חלקיק נקודתי. מתברר שעל מנת לשמור על האינורינטיות של התאור הקוונטי תחת טרנספורמצית לורנץ, יש להניח שלחלקיקים של התאוריה יש מסה אפס . זה מתקיים רק אם למרחב יש מספר מסוים של מימדים (כפי שהוסבר בסעיף הקודם).

נחזור לעניין הגרביטציה: אם מתייחסים לטנסור המטרי של המרחב כאל שדה, אז העירורים הקוונטיים של השדה הזה הם מבחינה פורמאלית חלקיקים חסרי מסה בעלי ספין2. על פי טיעון של פיינמן-ווינברג גם ההפך הוא נכון. אם תאוריה מנבאת את קיומם של עירורים כאלה, הרי משתמע מכך שהיא באופן טבעי מהווה תאוריה של גרביטציה קוונטית. הטענה היא שתורת המיתרים אכן מספקת את הסחורה גם בהיבט זה. במילים אחרות הספקולציה היא שתורת מיתרים (עתידית) תאחד את תורת הגרביטציה עם המודל הסטנדרטי, ותהיה theory of everything