

תרגיל מספר 1 - להגשה עד ה 16/3

1. התמרת לורנץ של נגזרת

א. הראו כי $\frac{\partial}{\partial x^\mu}$ עובר טרנספורמציה לורנץ כארבע וקטור עם אינדקס תחתון.

ב. הראו כי $\frac{\partial a^\mu}{\partial x^\mu} = \vec{\nabla} \cdot \vec{a} + \frac{1}{c} \frac{\partial a^0}{\partial t}$ וכי $\frac{\partial}{\partial x^\mu} \frac{\partial}{\partial x_\mu} = \nabla^2 - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2}$

2. ניתן להגדיר טורוס T^2 כמישור (x,y) תחת הזיהויים $x \sim x+2\pi$ ו $y \sim y+2\pi$. כעת נסתכל על ה orbifold

T^2/Z_2 כלומר הגיאומטריה המתקבלת כאשר מזוהים $(x,y) \sim (-x,-y)$ על הטורוס.

א. הראו כי ל T^2/Z_2 ישנם 4 נקודות שבת. מהן?

ב. הראו כי T^2/Z_2 דומה לשפה של כדור תלת מימדי עם 4 נקודות מיוחדות עליו. (הכוונה כאן

היא להראות כי הצורה שמתקבלת תחת הזיהויים האלה שקולה לכדור. תחילה יש למצוא איך

נראה ה fundamental domain של T^2/Z_2 , ואח"כ יש להראות כי מבחינה גיאומטרית הוא

שקול לכדור. אין צורך בהוכחה פורמאלית.)

3. נתייחס לתרשים מרחב זמן בו הציר האנכי הוא x^0 והציר האופקי הוא x^1 המוגדרים במערכת S. כעת

נעבור למערכת S' המתקבלת מ S ע"י התמרת לורנץ.

א. שרטטו את הצירים המתאימים ל x^0 ו x^1 . הראו כי הצירים האלה אינם מאונכים.

ב. מצאו את הזווית בין הצירים.

יש להבחין בין התמרת לורנץ עם מהירות שלילית, וטרנספורמציה עם מהירות חיובית. יש לרשום

במפורש לאיזה כיוון כל אחד מהצירים פונה.

4. ראינו כי הזיהוי $x \sim x+2\pi R$ גורר שהקואורדינטה x מייצגת מרחב שהוא מעגל. תהליך זיהוי כזה נקרא

קומפקטיפיקציה. נתייחס כעת לקומפקטיפיקציה דמוית האור

$$\begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} + 2\pi \begin{pmatrix} R \\ -R \end{pmatrix}$$

א. הקומפקטיפיקציה הזאת היא קומפקטיפיקציה בכיוון קונוס האור. הראו זאת ע"י רישום הזיהוי

במערכת קואורדינטות קונוס האור.

בכדי לקבל תמונה פיסיקלית לקומפקטיפיקציה זאת נבחן את

$$(*) \quad \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} x \\ ct \end{pmatrix} + 2\pi \begin{pmatrix} \sqrt{R^2 + \varepsilon^2} \\ -R \end{pmatrix}$$

עבור ε סופי אך קטן ביחס ל R , ואח"כ נשווה אותו לאפס.

- ב. הראו כי ישנה מערכת יחוס S' שבה הטרנספורמציה פועלת על הקואורדינטה x בלבד.
- ג. מהי המהירות של המערכת יחוס שמצאתם, ביחס למערכת הייחוס המקורית?
- ד. מהו רדיוס הקומפקטיפיקציה במע' S' ?
- ה. ציירו תרשים מרחב זמן עבור התוצאה מהסעיף הקודם: מצאו שתי נקודות במע' S המזוהות תחת $(*)$ ושרטטו את מע' הצירים S' בה הזיהוי הוא מרחבי בלבד.
- ו. השלימו את המסקנה הבאה: ניתן להתייחס לקומפקטיפיקציה דמוית אור עם רדיוס R כקומפקטיפיקציה רגילה ברדיוס _____, הנצפית במע' יחוס עם פרמטר $\gamma \sim R/$ _____, בגבול ש _____ שואף לאפס.