$\boxed{A01}$ (2009 1.1)

$$S = S_1 + S_2 = f(\Omega_1) + f(\Omega_2)$$
$$= f(\Omega_1 \cdot \Omega_2)$$

קולט

$$f(\Omega_1) + f(\Omega_2) = f(\Omega_1 \cdot \Omega_2)$$

ננסה שעובד $f(\Omega_1) \sim \ln \Omega_1$ (נקח)

וזה אכן פועל

$$\ln(\Omega_1) + \ln(\Omega_2) = \ln(\Omega_1 \Omega_2)$$

אבל זו לא הוכחה...

ע"י גזירה $\frac{\partial}{\partial \Omega_1}$ (נגזר)

$$f'(\Omega_1) = \Omega_2 f'(\Omega_1 \cdot \Omega_2)$$

$\frac{\partial}{\partial \Omega_2}$

$$f'(\Omega_2) = \Omega_1 f'(\Omega_1 \Omega_2)$$

וחלוקה

$$\frac{f'(\Omega_1)}{f'(\Omega_2)} = \frac{\Omega_2}{\Omega_1}$$

$$f'(\Omega_1) \cdot \Omega_1 = f'(\Omega_2) \Omega_2 = \text{const}$$

קבוע כי זה נכון לכל Ω_1, Ω_2

מכאן

$$f'(x) \cdot x = \text{const}$$
$$\rightarrow f'(x) \sim \frac{\text{const}}{x}$$
$$\rightarrow f(x) \sim \ln x$$

מש"ל.

A14 (2009.1.2)

(א $\frac{1}{2}m\langle V_T^2\rangle = \frac{3}{2}kT$ מחוק החלוקה השווה.

$$\sqrt{\langle v^2\rangle - \langle v\rangle^2} = (V_T)_{RMS} = \frac{3kT}{m}$$

התנאי : $V_{piston} >> V_T$ "sudden"

נזכור : המשמעות - אין התנגשויות עם הבוכנה.

(ב אין התנגשויות עם הבוכנה ← $T=const$

כאילו שכל החלקיקים ישבו רגע.

דרך אחרת: $E = const = \frac{3}{2}NkT$

$\rightarrow T = const$

$$P_0V_0 = NkT_0 = NkT_1 = P_1V_1$$

מכאן

$$\rightarrow \boxed{\frac{P_1}{P_0} = \frac{V_0}{V_1}}$$

$$E = const \rightarrow S = Nk\ln V + const$$

$$\rightarrow \boxed{S_1 - S_0 = Nk\ln\frac{V_1}{V_0}}$$ (Pathria, 1.4, (29))

$\int\frac{dU}{T} = 0 = \int dS - \frac{1}{T}\int PdV = S_1 - S_0 - Nk\int_{V_1}^{V}\frac{dV}{V} \rightarrow S_1 - S_0 = Nk\ln\frac{V_1}{V_0}$, $T=const$ [illegible]

(ג $E \sim T$, $S \sim \ln VE^{3/2}$

$$S \sim \ln VT^{3/2} = const$$

$$\rightarrow \frac{T_1}{T_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{2/3}$$

$$\frac{P_1V_1}{P_0V_0} = \frac{T_1}{T_0} \rightarrow \frac{P_1}{P_0} = \left(\frac{V_0}{V_1}\right)^{3/2}$$

(הערה: ניתן להגיע למצב כי ע"י תהליך הפיך בטמפרטורה קבועה $dU = T\int dS - \int PdV = T(S_1 - S_0) - NkT\int_{V_0}\frac{dV}{V} = 0$)

$\boxed{A06}$ (2008 1.2)
(2009 1.3)

N harmonic oscillators,

א)

$$E = \sum_{i=1}^{N} \hbar\omega\left(n_i + \frac{1}{2}\right) = \hbar\omega\left[\frac{N}{2} + \sum_i n_i\right]$$

נגדיר:

$$R = \frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2} = \sum_{i=1}^{N} n_i$$

כל עלינו למצוא את מספר הדרכים דיכן ניתן לסדר R

כדורים ב- N תאים = $N-1$ מחיצות

$$\circ \mid \circ \quad \circ \mid \circ \quad \circ \mid$$

סה"כ $\frac{(R+N-1)!}{R!(N-1)!}$ אפשרויות

סידור פנימי של מחיצות, או כדורים לא [illegible]

$$\Omega(E) = \frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2} - 1\right)!}{\left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}\right)!(N-1)!} \approx \frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2}\right)!}{\left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}\right)! N!}$$

$$N! \approx N^N$$

לסדר בשימוש סטירלינג

ולכן

$$\approx \frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2}\right)^{\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2}}}{\left(\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}\right)^{\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}} \cdot N^N} \underset{\left(\frac{E}{\hbar\omega} \gg \frac{N}{2}\right)}{\approx} \frac{\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{\frac{E}{\hbar\omega} + \frac{N}{2}}}{\left(\frac{E}{\hbar\omega}\right)^{\frac{E}{\hbar\omega} - \frac{N}{2}} N^N}$$

$$\boxed{\Omega(E) = \left(\frac{E}{\hbar\omega N}\right)^N}$$

$$\Omega(E+\Delta) - \Omega(E) = \left(\frac{1}{\hbar\omega N}\right)^N \left[(E+\Delta)^N - (E)^N\right]$$

נשים לב ש-

ב) ההמילטוניאן:

$$\mathcal{H} = \sum_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{2} m\omega^2 q_i^2 + \frac{1}{2m} p_i^2 \right) = E$$

זוהי אליפסואיד N מימדי

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{q_i^2}{\frac{2E}{m\omega^2}} + \frac{p_i^2}{2mE} \right) = 1$$

נחליף משתנים

$$u_i = \sqrt{\frac{m\omega^2}{2}}\, q_i \qquad v_i = \frac{1}{\sqrt{2m}}\, p_i$$

ונקבל

$$\sum_{i=1}^{N} \left(\frac{u_i^2}{E} + \frac{v_i^2}{E} \right) = 1$$

נפח כדור למרחב u,v

$$V_{u,v} = \frac{\pi^N E^N}{N!}$$

אבל

$$u_i v_i = \frac{\omega}{2} q_i p_i$$

לכן

$$\frac{2}{\omega} \int du\, dv = \int dq\, dp$$

מכאן נפח הכדור במרחב p,q:

$$V_{p,q} = \frac{2^N \pi^N E^N}{\omega^N N!} \approx \left(\frac{2\pi E}{\omega N} \right)^N$$

ובגלל ספירה דקיקה בעובי Δ

$$V_{p,q}(E+\Delta) - V_{pq}(E) = \left(\frac{2\pi}{\omega N} \right)^N \left[(E+\Delta)^N - E^N \right] \approx \left(\frac{2\pi}{\omega N} \right)^N \cdot \Delta N E^{N-1}$$

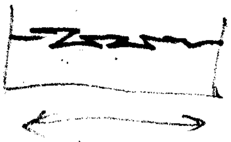
ולכן

$$W_0 = \frac{V(E+\Delta) - V(E)}{\Omega(E+\Delta) - \Omega(E)} = \frac{\left(\frac{2\pi}{\omega N} \right)^N \left[(E+\Delta)^N - E^N \right]}{\left(\frac{1}{\hbar\omega N} \right)^N \left[(E+\Delta)^N - E^N \right]}$$

$$= (2\pi\hbar)^N = h^N$$

כנדרש.

AOS 2009/1.4



א)

$$N_+ + N_- = N$$

$$L = (N_+ - N_-)a$$

$$N_\pm = \frac{1}{2}\left(N \pm \frac{L}{a}\right)$$

$$\Omega = \binom{N}{N_+} = \frac{N!}{\left[\frac{1}{2}\left(N+\frac{L}{a}\right)\right]!\left[\frac{1}{2}\left(N-\frac{L}{a}\right)\right]!}$$

$$\frac{S}{k_B} = \ln\Omega \overset{(N \gg \frac{L}{a})}{\approx} N\ln N - \frac{1}{2}\left(N+\frac{L}{a}\right)\ln\left(\frac{N+\frac{L}{a}}{2}\right) - \frac{1}{2}\left(N-\frac{L}{a}\right)\ln\left(\frac{N-\frac{L}{a}}{2}\right)$$

$$= N\ln 2 - \frac{N}{2}(1+x)\ln(1+x) - \frac{N}{2}(1-x)\ln(1-x) + N\ln N$$

ב) אנטרופית מתיחות $\tilde{f} = -\left(\frac{\partial F}{\partial L}\right)_T$

$$\tilde{f} = \frac{-\partial}{\partial L}\left(-\frac{1}{2}\sigma\frac{L^2}{N} - TS\right) \qquad x = \frac{L}{Na} \rightarrow \frac{\partial}{\partial L} = \frac{1}{Na}\frac{\partial}{\partial x}$$

$$= \sigma\frac{L}{N} - \frac{kT}{a}\left[-\frac{1}{2}\ln(1+x) - \cancel{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\ln(1-x) + \cancel{\frac{1}{2}}\right]$$

$$\tilde{f} = \sigma\frac{L}{N} - \frac{kT}{2a}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$= \sigma a x - \frac{kT}{2a}\left(2x + \frac{2}{3}x^3 + O(x^5)\right)$$

$$\left(\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) = \operatorname{arctanh}(x) \text{ טיילור ש לפי}\right)$$

מה לגבי סימן $\tilde{f}$?

ג) מהי ש' קידעית? $\frac{\partial \tilde{f}}{\partial L} > 0$

משמע $\frac{\tilde{f}(L+\Delta) - \tilde{f}(L)}{\Delta} > 0$

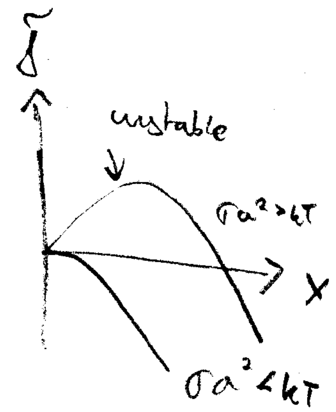
הכח גדל עם האורך! כמו $\frac{\partial P}{\partial V} > 0$

כ״ג

$$\sigma a - \frac{k_B T}{2a}\left(\frac{1}{1+x} + \frac{1}{1-x}\right) > 0$$

כ״ג ז' יציבות כאשר יש פתרון למשוואה?

$$\sigma a^2 > \frac{k_B T}{1-x^2}$$



נגדיר $kT_c = \sigma a^2$ ואז התנאי נהיה $x < \sqrt{1 - \frac{T}{T_c}}$ עבור $T < T_c$

כאשר $T > T_c$ אין פתרונות למשוואה.

(וכך צפינו את T_c...)

3) $\tilde{f} = 0 \rightarrow \sigma a^2 x = \frac{1}{2} k_B T \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$

$$\sigma a^2 \cancel{x} \approx k_B T \cancel{x} + \frac{1}{3} k_B T x^{\cancel{3}\,2}$$

$$\frac{3(\sigma a^2 - kT)}{kT} = x^2$$

$$x = \sqrt{3\left(\frac{T_c - T}{T}\right)}$$