$\boxed{D29}$ (HW 2009 11.1) Quantum Oscillator

$$\ddot{x} + \gamma\dot{x} + \Omega^2 x = A(t)$$

$$\varphi_A(\omega) = \frac{\hbar\omega\gamma}{M}\coth\frac{\hbar\omega}{2k_BT}$$

a) $(-\omega^2 - i\omega\gamma + \Omega^2)X_\omega = A_\omega$

$$|X_\omega|^2 = \frac{|A_\omega|^2}{(\omega^2-\Omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} \qquad \left(|V(\omega)|^2 = \omega^2|X(\omega)|^2\right)$$

Wiener - Kinchin: $\dfrac{|V(\omega)|^2}{|A(\omega)|^2} = \dfrac{\varphi_v(\omega)}{\varphi_A(\omega)}$

$$\rightarrow \boxed{\varphi_v(\omega) = \frac{\omega^2}{(\omega^2-\Omega^2)^2+\omega^2\gamma^2}\cdot\frac{\hbar\omega\gamma}{M}\coth\left(\frac{\hbar\omega}{2kT}\right)}$$

b) $$\lim_{\gamma\to 0}\frac{\gamma\omega}{(\omega^2-\Omega^2)^2+\omega^2\gamma^2} = \pi\delta(\omega^2-\Omega^2)$$

$$\left(\pi\delta(x) = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}\right), \quad \delta(x^2-\alpha^2) = \frac{1}{2|\alpha|}\left(\delta(x+\alpha)+\delta(x-\alpha)\right)$$

$$= \frac{\pi}{2\Omega}\left(\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)\right)$$

$$\varphi_v(\omega)\Big|_{\gamma\to 0} = \frac{\pi\hbar\omega^2}{2M\Omega}\left[\delta(\omega-\Omega)+\delta(\omega+\Omega)\right]\coth\frac{\hbar\omega}{2kT}$$

$$\langle v^2(t)\rangle = \int\varphi_v(\omega)\cdot\frac{d\omega}{2\pi} = \frac{\hbar\Omega}{2M}\coth\frac{\hbar\Omega}{2kT}$$

$$\frac{1}{2}M\langle v^2\rangle = \frac{\hbar\Omega}{4}\cdot\coth\frac{\hbar\Omega}{2kT} = \frac{1}{2}\hbar\Omega\left[\frac{1}{2}+\frac{1}{e^{\beta\hbar\Omega}-1}\right]$$

but $\hat{\mathcal{H}} = (a^\dagger a + \frac{1}{2}) \cdot \hbar\Omega$

$$\langle a^\dagger a \rangle = \frac{1}{e^{\beta\hbar\Omega} - 1}$$

$$\rightarrow E = \langle \hat{\mathcal{H}} \rangle = \hbar\Omega \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{e^{\beta\hbar\Omega} - 1} \right)$$

but kinetic energy $\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{1}{2} E$
for harmonic oscillator.

$\boxed{D30}$ (2008 11.3)
(2009 11.2)

(א

$$V_{int} = -\frac{e}{c}\sum_i v_i \bar{A} \qquad \bar{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \bar{A}}{\partial t}$$

$$= -\sum_i v_i \cdot \bar{F} \qquad \bar{F}_w = -\frac{e}{c}\bar{A}_w = \frac{e}{iw}\bar{E}_w$$

(עבור $\bar{E} \sim e^{-iwt}$)

$$\sum_i \langle \bar{v}_i \rangle = \alpha_v(w)\cdot F = \alpha_v(w)\frac{e}{iw}\bar{E}$$

$$j = e\sum_i \langle v_i \rangle = \alpha_v(w)\cdot\frac{e^2}{iw}\bar{E}_w \underset{\text{חוק אוהם}}{\overset{\text{(נדרוש)}}{=\!=\!=}} \sigma_w \bar{E}_w$$

מכאן

$$\mathrm{Im}\,\alpha_v(w) = \frac{w}{e^2}\cdot\mathrm{Re}(\sigma_w) \Leftarrow \alpha_v(w) = \frac{iw}{e^2}\sigma_w$$

הדיסיפציה Q

$$Q = \frac{1}{2}w\,\mathrm{Im}\,\alpha_v(w)\,|F|^2 = \frac{1}{2}\frac{w^2}{\cancel{e^2}}\cdot\frac{\cancel{e^2}}{w^2}|E_w|^2\cdot\mathrm{Re}(\sigma_w)$$

עבור $j_w = \mathrm{Re}(\sigma_w)E_w$

נקבל את חוק אוהם:

$$Q = \frac{1}{2}j\cdot E$$

(נשים לב שזה אחרי ממוצע ע"פ הזמן לכן החצי: $\overline{\frac{dE}{dt}}$)

מכיוון שהדיסיפציה כמובן חיובית נקבל

$$w\,\mathrm{Im}\,\alpha_v(w) = \frac{w^2}{e^2}\mathrm{Re}(\sigma_w) \geq 0$$

לכן עבור $w \to -w$ נקבל $\mathrm{Re}(\sigma_w) = \mathrm{Re}(\sigma_{-w})$, סימטרי ב- $w \to -w$.

ב) לפי משפט FDT:

$$\frac{2k_BT}{w}\mathrm{Im}\,\alpha_v(w) = \varphi_v(w)$$

$$\frac{2k_BT}{e^2}\cdot\mathrm{Re}(\sigma_w) = \int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot e^{+iwt}\cdot\langle \sum_i v_i(0)\sum_j v_j(t)\rangle$$

$$\underbrace{}_{\text{ממשי}} = \int_{-\infty}^{\infty}dt\cdot\cos(wt)\cdot\langle \frac{j(t=0)\,j(t)}{e^2}\rangle$$

(פונקציה סימטרית ב- $t \to -t$ לכן $\int_{-\infty}^{\infty} \Rightarrow 2\int_0^{\infty}$)

$$\boxed{\mathrm{Re}(\sigma_w) = \frac{1}{k_BT}\int_0^{\infty}dt\cdot\cos(wt)\cdot\langle j(0)\,j(t)\rangle}$$

ב) כדי למצוא את מקדם הדיפוזיה נסתכל על

$$\langle r^2\rangle = 6Dt$$

אך

$$\vec r(t) = \int_0^t dt'\, \vec v(t')$$

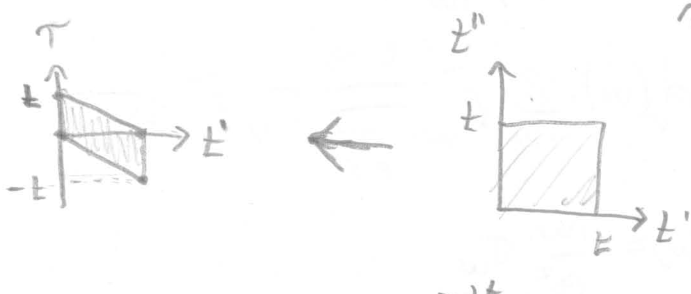
לכן

$$\langle r^2\rangle = \int_0^t dt' \int_0^t dt''\, \langle \vec v(t')\, \vec v(t'')\rangle$$

נגדיר

$$\tau = t'' - t'$$

תחום האינטגרציה



אבל מכיוון ש- $\langle \vec v(t')\, \vec v(t'+\tau)\rangle \propto e^{-\lambda t}$ אזי ניתן להחליף את גבולות האינטגרציה $\int d\tau \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} d\tau$

ואז

$$\langle r_i^2\rangle = \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \underbrace{\langle \vec v_i(t')\, \vec v_i(t'+\tau)\rangle}_{\text{אינו תלוי ב-}t'\text{ לכן}}$$

$$= \int_0^t dt' \int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \langle \vec v_i(0)\, \vec v_i(\tau)\rangle$$

$$\langle r^2\rangle = t\int_{-\infty}^{\infty} d\tau\, \langle \vec v_i(0)\, \vec v_i(\tau)\rangle \overset{\text{נדרוש}}{=} 6Dt$$

לכן

$$D = \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \langle \vec v_i(0)\, \vec v_i(\tau)\rangle\, d\tau$$

$$= \frac{1}{3}\int_0^{\infty} \left(\langle v_{ix}(0)\, v_{ix}(\tau)\rangle + \langle v_{iy}(0)\, v_{iy}(\tau)\rangle + \langle v_{iz}(0)\, v_{iz}(\tau)\rangle\right) d\tau$$

מכיוון ש- $\langle V_{ix} V_{iy}\rangle = 0$ כאשר אין קורלציה בין הכיוונים המרחביים השונים.
מכיוון שאין כיוון מועדף הרי $\langle V_x V_x(\tau)\rangle = \langle V_y V_y(\tau)\rangle =$

(רק רכיבי i=j תורמים, לכן $\frac{1}{n}$ ולא $\frac{1}{n^2}$)

$$D = \int_0^{\infty} \langle \vec v_i(0)\, \vec v_i(\tau)\rangle\, d\tau = \frac{1}{ne^2}\int_0^{\infty} \langle j(0)\, j(t)\rangle\, dt = \frac{k_B T\, Re(\sigma_{\omega\to 0})}{ne^2}$$

לכן

כנדרש:

$$\boxed{\frac{eD}{k_B T} = \frac{Re(\sigma_{\omega\to 0})}{ne}}$$

$\boxed{D26}$ (HW 2005 11.3)

$t = \frac{\tau}{T}$ = transmission prob.

a) $\langle I\rangle = \frac{e}{\tau}\langle n_i\rangle$, $\langle n_i\rangle = \frac{\tau}{T}$, $\boxed{\langle I\rangle = \frac{e}{T}}$

$\langle (I-\langle I\rangle)^2\rangle = \frac{e^2}{\tau^2}\langle n_i^2\rangle - \langle I\rangle^2$

but for $n_i = 0, 1$, $n_i^2 = n_i$, $\langle n_i^2\rangle = \langle n_i\rangle = \frac{\tau}{T}$

$\langle \delta I^2\rangle = \frac{e^2}{\tau^2}\cdot\frac{\tau}{T} - \frac{e^2}{T^2} = \frac{e^2}{\tau^2}t(1-t)$

if $t=0$ or $t=1$ we have $\langle \delta I^2\rangle = 0$

b) for $t \ll 1$ $\langle \delta I^2\rangle \approx \frac{e^2}{\tau^2}t = \frac{e^2}{\tau^2}\cdot\frac{\tau}{T} = \frac{e}{\tau}\cdot\frac{e}{T} = \frac{e}{\tau}\langle I\rangle$

in freq. interval $\left[\frac{1}{\tau}, \frac{1}{\tau} + d\left(\frac{1}{\tau}\right)\right]$ we have $\left[\frac{\omega}{2\pi}, \frac{(\omega + d\omega)}{2\pi}\right]$

$d\langle \delta I^2\rangle = e\langle I\rangle\cdot\frac{d\omega}{2\pi}$

Johnson noise: $d\langle \delta I^2\rangle = \frac{2kT}{\pi R}d\omega$ (see HW 10.4)

shot noise: $d\langle \delta I^2\rangle = e\langle I\rangle\frac{d\omega}{2\pi}$

Shot noise dominates! $\rightarrow$ Shot >> Johnson $\rightarrow$ $\underbrace{kT \ll \frac{e\langle I\rangle}{4}R = \frac{1}{4}e\langle V\rangle}$

c) $\langle I^3\rangle = \left(\frac{e}{\tau}\right)^3\frac{\tau}{T} = \frac{e^2}{\tau^2}\langle I\rangle$

$\langle (I-\langle I\rangle)^3\rangle = \langle I^3\rangle - 3\langle I^2\rangle\langle I\rangle + 3\langle I\rangle^3 - \langle I\rangle^3$

$= \frac{e^2}{\tau^2}\langle I\rangle - 3\frac{e^2}{\tau^2}\langle I\rangle^2 + 2\langle I\rangle^3$

$= \frac{e^3}{\tau^3}\left(t - 3t^2 + 2t^3\right) = \frac{e^2}{\tau^3}t(1-t)(1-2t)$