

בחינה במצב מוצק 1

מס' הקורס: 203.1.3111

המרצה: פרופ' משה שכטר

משך הבחינה: 4 שעות

יש לפתור 2 מתוך 3 השאלות הבאות. כל השאלות שוות בערכן.

מותר להשתמש רק בדף הנוסחאות המצורף ובמחשבון פשוט.

שאלה 1

נתון גז אלקטרונים חופשיים בדו-מימד.

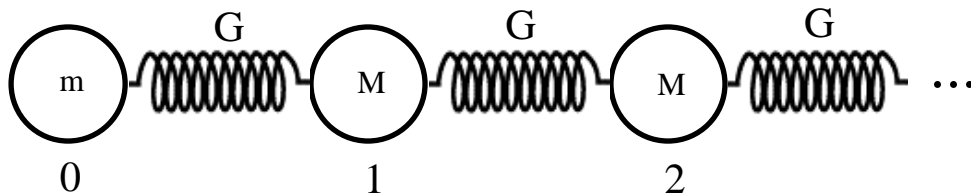
1. מצאו את הקשר בין וקטור הגל של פרמי k_F לצפיפות האלקטרונים n . (13 נק')
2. חשבו את צפיפות המצבים של האלקטרונים החופשיים. (12 נק')
3. חשבו את הלחץ של גז האלקטרונים בטמפרטורה $T=0$. (13 נק')
4. הראו כי הפוטנציאל הכימי של גז האלקטרונים בטמפ' $T>0$ בדו-מימד ניתן ע"י:

$$\mu(T) = k_B T \ln \left[e^{\frac{\pi n \hbar^2}{m k_B T}} - 1 \right]$$

(12 נק')

שאלה 2

נתונה שרשרת חד-מימדית חצי-אינסופית של אטומים בעלי מסה M . שכנים קרובים מחוברים על-ידי קפיצים עם קבוע G . האטום הראשון, שנמצא ב- $R_0 = 0$, שונה מכל השאר והוא בעל מסה m . שאר האטומים נמצאים ב- $R_n = na\hat{x}$ כאשר $n > 0$. המיקומים האמתיים של המסות הם $r_n = R_n + u_n$ כאשר u_n היא תזוזה קטנה מנקודת שיווי המשקל לאורך השרשרת.



במקרה הזה אין סימטריה להזזות ובפרט משוואת הכוחות על המסה הראשונה שונה ממשוואת הכוחות על מסה $n > 0$. עם זאת, הרחק מהקצה נצפה שספקטרום התנודות יהיה לזה של מערכת מחזורית (אינסופית). למעשה, השינוי העיקרי ביחס למערכת אינסופית הוא תוספת של אופן תנודה **ממוקם** ליד הקצה.

1. בהנחה שהמערכת אינסופית, כתבו את משוואת התנועה למסה $n > 0$, פתרו אותה (עד כדי מקדם) ומצאו את יחס הדיספרסיה $\omega(k)$. (10 נק')
2. מצאו את המצבים הממוקמים u_n . (15 נק')
- רמז: מצבים ממוקמים מאופיינים בדעיכה אקספוננציאלית מרחבית, לכן על מנת למצוא את המצבים הממוקמים, השתמשו בתוצאה של סעיף 1 והניחו $k = k_R + ik_I$ עם $k_I \neq 0$. בנוסף כיוון שאנחנו מחפשים מצבים אוסילטוריים אפשר לדרוש $\text{Im}[\omega] = 0$.
3. שרטטו את $\omega(k_R)$ באזור ברילואן הראשון. התייחסו גם ליחס שמצאתם בסעיף 1 וגם למצבים הממוקמים שמצאתם בסעיף 2. (10 נק')
4. כתבו את משוואת הכוחות עבור המסה הראשונה $n = 0$ והשתמשו בה ובמשוואה שכתבתם בסעיף 1 כדי לבטא את k_I ואת ω בעזרת נתוני השאלה עבור $m < M/2$. (15 נק')

שאלה 3

נתון גביש חד-מימדי עם בסיס של שני אטומים. ישנם N אטומים מסוג A הממוקמים בנקודות $x = R_n = 2mc$, כאשר $m = 1, 2, \dots, N$, ו- $N-1$ אטומים מסוג B הממוקמים בנקודות $x = R_n = (2n-1)c$, כאשר $n = 1, 2, \dots, N$. תנאי השפה מחזוריים. לכל אטום יש אלקטרון אחד ואורביטל אחד. האורביטלים של האטומים שב- R_m מתוארים ע"י פונקציית הגל $\psi_m(x - R_m)$, והאורביטלים של האטומים שב- R_n מתוארים ע"י פונקציית הגל $\phi_n(x - R_n)$. הניחו כי פונקציות הגל אורתונורמליות:

$$\langle \phi_m | \phi_n \rangle = 0, \quad \langle \phi_m | \phi_{m'} \rangle = \delta_{mm'}, \quad \langle \psi_m | \psi_{m'} \rangle = \delta_{mm'}$$

ההמילטוניאן של אלקטרון בודד נתון ע"י $\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + U(x)$ כאשר $U(x)$ היא פונקציה מחזורית בוקטור הסריג. אלמנטי המטריצה של ההמילטוניאן נתונים ע"י

$$\langle \psi_m | \hat{H} | \psi_{m'} \rangle = \varepsilon_A \delta_{mm'}$$

$$\langle \phi_n | \hat{H} | \phi_{n'} \rangle = \varepsilon_B \delta_{nn'}$$

$$\langle \psi_m | \hat{H} | \phi_n \rangle = \begin{cases} -t, & n, m \text{ nearest neighbors} \\ 0, & \text{else} \end{cases}$$

1. ניתן לרשום את פונקציות הגל של אלקטרון בכל אחד מתתי הסריגים כקומבינציה לינארית של פונקציות הגל האטומיות, כך שיקיימו את משפט בלוך, באופן הבא:

$$\psi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_m e^{-ikR_m} \psi_m(x - R_m)$$

$$\phi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_n e^{-ikR_n} \phi_n(x - R_n)$$

עבור $t=0$, הראו כי ההמילטוניאן אלכסוני בבסיס של ψ_k, ϕ_k ותארו את ספקטרום האנרגיות כפונקציה של k . (15 נק')

בסעיפים הבאים $t > 0$:

2. כתבו את מטריצת ההמילטוניאן בבסיס של ψ_k, ϕ_k . (20 נק')

3. מצאו את הערכים העצמיים של המטריצה \hat{H} (את ספקטרום האנרגיה כפונקציה של k). (15 נק')

4. שרטטו את הערכים העצמיים של \hat{H} עבור \hat{H} עבור $t = 1 \text{ eV}$ ו- $\varepsilon_A - \varepsilon_B = 0$. (10 נק') (בנוסף, סה"כ 60 נק' לשאלה 3)