א. האנרגיה של הפוטון צריכה להיות גבוהה מפונקציית העבודה.

$$h\nu > 3\cdot10^{-19}$$

לכן התדירות המינימלית היא:

$$\nu = \frac{3\cdot10^{-19}}{h} = 4.54\cdot10^{14}$$

קשר בין אורך גל ותדירות:

$$c = \lambda\cdot\nu$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{c}{\nu} = \frac{c}{4.54\cdot10^{14}} = 6.585\cdot10^{-7}\,[m]$$

ב. אורך הגל של האור הוא $4\cdot10^{-7}$

התדירות אז: $\nu = \frac{c}{\lambda} = 7.475\cdot10^{14}$

האנרגיה אז: $E = h\nu = 6.6\cdot10^{-34}\cdot7.475\cdot10^{14} = 4.93\cdot10^{-19}\,[J]$

לכן האנרגיה של פוטון נפלט היא:

$$E_k = \underset{\text{אנרגיית האור}}{E} - \underset{\text{פונקציית העבודה}}{\phi} = 4.93\cdot10^{-19} - 3\cdot10^{-19} = 1.93\cdot10^{-19}\,[J]$$

ג. התשובה לסעיף ב' לא משתנה

אם מכפילים את עוצמת האור.

האפקט הפוטואלקטרי ואטומי מימן

א. בניסוי הפוטואלקטרי מהו שיפוע הגרף של מתח העצירה כפונקציה של תדר האור?

ב מהו התדר המינימלי הנידרש בכדי ליינן אטום מימן שנימצא ברמת היסוד שלו (באנרגיה $-13.6eV$)?

ג. כמה אטומי מימן ניתן ליינן בשניה אחת אם לאור עוצמה של $100mW$(מילי־וואט) ותדירות כפי שחישבת בסעיף ב?

ד. משתמשים בתדר כפול מהתדר שחושב בסעיף ב (שוב על אטומי מימן). מה יהיה מתח העצירה עבור קרן בעוצמה של $100mW$ ועבור קרן בעוצמה של $200mW$? הסבר.

בסעיפים ב,ג,ד כל האלקטרונים באטומים נמצאים ברמת היסוד.

פתרון

א. מתח העצירה הוא המתח בו האלקטרונים יאבדו את כל המהירות שלהם, כלומר המתח שייצור אנרגיה פוטנציאלית ששווה לאנרגיה הקינטית של האלקטרונים $eV_0 = hf - \phi$.
שיפוע הגרף של V_0 כפונקציה של f הוא $\frac{h}{e}$, קבוע פלאנק חלקי מטען האלקטרון.

ב. בכדי ליינן אטום מימן מרמת היסוד יש לפגוע בו עם פוטון באנרגיה של $13.6eV$.
התדר של פוטון כזה הינו

$$f = \frac{13.6eV}{h} = \frac{13.6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} J}{6.63 \cdot 10^{-34} J \cdot s} = 3.28 \cdot 10^{15} Hz = 3280THz$$

זהו אור בתדר גבוהה מאוד. קרינה א"מ בתחום זה נקראת קרינת גמא.

ג. כל פוטון מיינן אטום אחד. אם האור בעוצמה של $100mW$ (כלומר מעביר אנרגיה של $100mJ$ כל שנייה) זה אומר שמספר הפוטונים שפוגעים במימן בממוצע בכל שנייה הוא $\frac{100 \cdot 10^{-3}}{13.6 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19}} \frac{1}{s} = 4.6 \frac{photons}{sec}$.
ולכן ניתן ליינן בממוצע 4.6 אטומי מימן.

ד. מתח העצירה אינו תלוי בעוצמת האור. בשני המקרים מתח העצירה יהיה:

$$V_0 = \frac{hf - \phi}{e} = \frac{2 \cdot 13.6eV - 13.6eV}{1.6 \cdot 10^{-19} C} = 13.6Volt$$

3_ 7912

$\lambda = \frac{h}{p}$ $\quad p = mv$

$\frac{\lambda}{\lambda_e} = \frac{\frac{h}{p}}{\frac{h}{p_e}} = \frac{p_e}{p} = \frac{m_e \cancel{v}}{m(3\cancel{v})}$

$m = \frac{\lambda_e}{3\cdot\lambda} m_e = \frac{1}{3\cdot 1.813} 10^4 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}$

$m \approx 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg

החלקיק הנו פרוטון

משוואת שרדינגר

נתונה משוואת שרדינגר עבור פונקציית הגל של חלקיק בעל מסה m הנע בפוטנציאל $V\left(x\right)$ בחד מימד:

$$i\hbar\frac{\partial\psi\left(x,t\right)}{\partial t}=-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}\psi\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}+V\left(x\right)\psi\left(x,t\right)$$

א. הראה כי עבור פוטנציאל שאינו תלוי במיקום $V\left(x\right)=V_{0}$ (כאשר V_0 קבוע) הפונקצייה $\psi\left(x,t\right)=Ae^{-i(\omega t-Kx)}$ היא פתרון למשוואה. מהו יחס הדיספרסיה המתקבל ואיך הוא קשור לאנרגיה של החלקיק?

ב. עבור פוטנציאל כללי $V\left(x\right)$ הראה כי אם $\psi_{1}\left(x,t\right)$ ו $\psi_{2}\left(x,t\right)$ פותרים את המשוואה אז גם $\psi_{3}\left(x,t\right)=\psi_{1}\left(x,t\right)+\psi_{2}\left(x,t\right)$ הינו פתרון למשוואה (נקרא עקרון הסופרפוזיציה).

ג. נניח כי פונקציית הגל היא $\psi\left(x,t\right)=e^{-i\omega t}\tilde{\psi}\left(x\right)$ (כאשר $\tilde{\psi}\left(x\right)$ הינו פונקציה של x בלבד). הראה ע"י הצבת הפתרון במשוואת שרדינגר כי המשוואה ש $\tilde{\psi}\left(x\right)$ מקיים היא משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן:

$$-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}\tilde{\psi}\left(x\right)}{\partial x^{2}}+V\left(x\right)\tilde{\psi}\left(x\right)=E\tilde{\psi}\left(x\right)$$

ד. נתון כעת פוטנציאל $V\left(x\right)=\begin{cases}0 & x<0\\ V_{0} & x\geq0\end{cases}$. הראה כי אם $\tilde{\psi}\left(x\right)$ פונקצייה רציפה ב $x=0$ אז גם הנגזרת שלה לפי x רציפה ב $x=0$. (רמז: בצע אינטגרציה לשני האגפים של משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן בתחום $\left[-\epsilon,\epsilon\right]$ וקח את הגבול $\epsilon\rightarrow0$).

פתרון

א. נציב את הפתרון הנתון במשוואת שרדינגר:

$$\omega\hbar Ae^{-i(\omega t-Kx)}=\hbar^{2}K^{2}Ae^{-i(\omega t-Kx)}+V_{0}Ae^{-i(\omega t-Kx)}\Rightarrow\hbar\omega=\frac{\hbar^{2}}{2m}K^{2}+V_{0}$$

קיבלנו את יחס הדיספרסיה. בכדי לקבל את הקשר לאנרגיה נשתמש באורך גל דה ברולי $\lambda=\frac{h}{p}\Rightarrow K=\frac{p}{\hbar}$ ובנוסחת פלאנק $E=hf=\hbar\omega$ ונקבל: $E=\frac{p^{2}}{2m}+V_{0}=\frac{1}{2}mv^{2}+V_{0}$.
זוהי פשוט הנוסחה לאנרגיה של החלקיק.

ב.$\psi_{1}\left(x,t\right)$ ו $\psi_{2}\left(x,t\right)$ פותרים את המשוואה כלומר:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_{1}\left(x,t\right)}{\partial t}=-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}\psi_{1}\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}+V\left(x\right)\psi_{1}\left(x,t\right)$$

$$i\hbar\frac{\partial\psi_{2}\left(x,t\right)}{\partial t}=-\frac{\hbar^{2}}{2m}\frac{\partial^{2}\psi_{2}\left(x,t\right)}{\partial x^{2}}+V\left(x\right)\psi_{2}\left(x,t\right)$$

נחבר את המשוואת ונקבל:

$$i\hbar\frac{\partial\psi_3(x,t)}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi_3(x,t)}{\partial x^2}+V(x)\psi_3(x,t)$$

כלומר גם ψ_3 פותר את המשוואה.
ג. נציב את הפתרון הנתון במשוואה:

$$\omega\hbar e^{-i\omega t}\tilde{\psi}(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}e^{-i\omega t}\frac{\partial^2\tilde{\psi}(x)}{\partial x^2}+V(x)e^{-i\omega t}\tilde{\psi}(x)\Rightarrow E\tilde{\psi}(x)=-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\tilde{\psi}(x)}{\partial x^2}+V(x)\tilde{\psi}(x)$$

כאשר השתמשנו בנוסחת פלאנק $E=\hbar\omega$. קיבלנו את משוואת שרדינגר הב"ת בזמן.
ד. נבצע אינטגרציה למשוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן בתחום $[-\epsilon,\epsilon]$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\int_{-\epsilon}^{\epsilon}\frac{\partial^2\tilde{\psi}(x)}{\partial x^2}dx+\int_{-\epsilon}^{\epsilon}V(x)\tilde{\psi}(x)dx=\int_{-\epsilon}^{\epsilon}E\tilde{\psi}(x)dx\Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}(x)}{\partial x}|_{x=\epsilon}-\frac{\partial\tilde{\psi}(x)}{\partial x}|_{x=-\epsilon}\right)=\int_{-\epsilon}^{\epsilon}(E-V(x))\tilde{\psi}(x)dx=E\int_{-\epsilon}^{0}\tilde{\psi}(x)dx+(E-V_0)\int_{0}^{\epsilon}\tilde{\psi}(x)dx$$

כיוון ש $\tilde{\psi}(x)$ רציפה ב $x=0$ אז גם הפונקציה הקדומה שלה רציפה ולכן $\lim_{\epsilon\to0}\int_0^{\epsilon}\tilde{\psi}(x)dx=$ $0=\lim_{\epsilon\to0}\int_{-\epsilon}^{0}\tilde{\psi}(x)$ ולכן בגבול $\epsilon\to0$ אגף ימין מתאפס.
נקבל מאגף שמאל:

$$\lim_{\epsilon\to0}\left(\frac{\partial\tilde{\psi}(x)}{\partial x}|_{x=\epsilon}-\frac{\partial\tilde{\psi}(x)}{\partial x}|_{x=-\epsilon}\right)=\lim_{\epsilon\to0^+}\frac{\partial\tilde{\psi}(x)}{\partial x}|_{x=\epsilon}-\lim_{\epsilon\to0^-}\frac{\partial\tilde{\psi}(x)}{\partial x}|_{x=\epsilon}=0$$

כלומר הגבולות של הנגזרת של פונקציית הגל ב $x=0$ מלמעלה ומלמטה שווים, כלמור הנגזרת רציפה ב $x=0$.