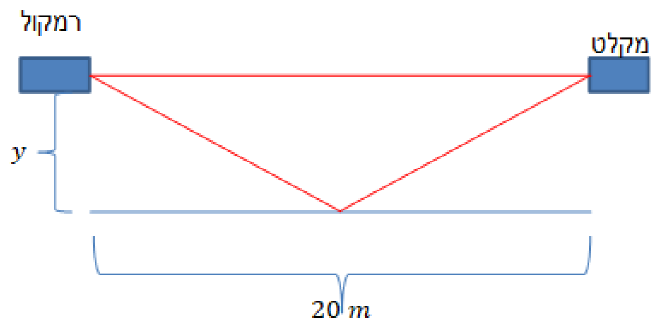
התאבכות ממראה

התאבכות ע"י מראה אפקית

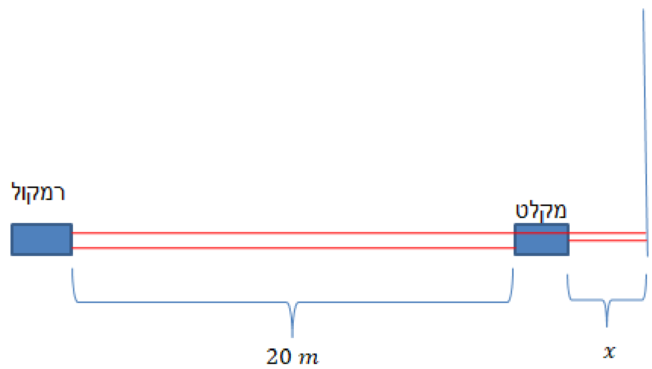
מקלט ורמקול (משדר לכל הכיוונים) נמצאים אחד מול השני במרחק 20 מטר זה מזה. הרמקול משדר גל קול בתדירות $f = 440Hz$. מתחת להם, ישנו משטח מחזיר (כך שהוא במקביל לקו המחבר ביניהם) במרחק y, שניתן לשנותו. גל הקול שנפלט מהרמקול מגיע מצד אחד בצורה ישירה למקלט ומצד שני אחרי החזרה אחת מן המשטח אל המקלט. שני הגלים מתאבכים. באילו מרחקים יהיה אות מקסימלי שנקלט במשדר? (להזכירכם מהירות הקול כ 340 מטר בשנייה).



איור 1: התאבכות ממראה אופקית

התאבכות על ידי מראה אנכית

כעת מעבירים את המשטח המחזיר אל מרחק x מאחורי המקלט (כך שהוא בניצב לקו המחבר בין המקלט לרמקול). גל הקול שנפלט מהרמקול מגיע מצד אחד בצורה ישירה למקלט ומצד שני לאחר החזרה אחת מן המשטח אל המקלט (הגל עובר דרך המקלט, פוגע במשטח ומוחזר). שני הגלים מתאבכים. מה צריך להיות x כך שיקלט אות מקסימלי?



איור 2: התאבכות ממראה אנכית

פתרון

התאבכות ע"י מראה אפקית

נסמן את מרחק המשטח המחזיר מהקו שמחבר את הרמקול למקלט בy. ההפרש בין הדרכים שעושים שני הגלים (זה שהגיע באופן ישיר למקלט וזה שהוחזר מהמשטח המחזיר) זהה להפרש הדרכים בין גל שיוצא מהרמקול וגל שיוצא מנקודה שנמצאת במרחק $2y$ מתחת לרמקול. המרחק שעובר הגל שנע ישר מהרמקול למקלט הוא $L_1 = 20m$. המרחק שמוחזר מהמשטח המחזיר עובר מרחק $L_2 = \sqrt{(2y)^2 + L_1^2}$. בנוסף הגל שמוחזר מהמראה צובר פאזה π שזה כמו לעבור מרחק של עוד חצי גל. עוצמה מקסימלית תתקבל כאשר הפרש המרחקים הוא כפולה שלמה של אורכי גל:

$$L_1 - L_2 + \frac{\lambda}{2} = \lambda n \Rightarrow L_1 - \sqrt{(2y)^2 + L_1^2} = \lambda\left(n - \frac{1}{2}\right) \Rightarrow$$

$$L_1^2 - 2L_1\lambda\left(n - \frac{1}{2}\right) + \lambda^2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 = (2y)^2 + L_1^2 \Rightarrow y = \frac{1}{2}\sqrt{\lambda^2 n^2 - \left(\lambda^2 + 2L_1\lambda\right)n + L_1\lambda + \frac{\lambda^2}{4}}$$

אורך הגל של גלי הקול $\lambda = \frac{v}{f} = \frac{340}{440}m = 0.77m$ לכן נקבל עוצמה מקסימאלית עבור:

$$y = \frac{1}{2}\sqrt{0.59n^2 - 31.39n + 0.15}\ m$$

כלומר, אם נניח את המשטח המחזיר במרחקים $\frac{1}{2}\sqrt{0.59n^2 - 31.39n + 0.15}$ מטרים, כאשר n מספר שלם כלשהו, נקבל עוצמה מקסימאלית במקלט.

התאבכות על ידי מראה אנכית

כעת הפרש הדרכים בין הגל המוחזר והגל הישיר הוא $2x$, לכן לקבלת עוצמה מקסימאלית:

$$2x + \frac{\lambda}{2} = \lambda n \Rightarrow x = \frac{\lambda}{2}\left(n - \frac{1}{2}\right) = 0.385\left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot m$$

כלומר, עוצמה מקסימאלית תתקבל כאשר המשטח יהיה במרחק $0.385\left(n - \frac{1}{2}\right) \cdot m$ מטר מאחורי המקלט (כאשר n מספר שלם כלשהו).

שני סדקים וסדק יחיד

ניסוי יאנג בשני סדקים: מבצעים ניסוי יאנג בשני סדקים שרוחבם זניח והמרחק ביניהם הוא 0.16 מ`מ. הניסוי מבוצע ע`י לייזר אדום באורך גל של 650 ננומטר. מרחק המסך מהסדקים הוא 100 ס`מ.

א. יש למצוא את מיקומי 3 נקודות החושך והאור הראשונים ביחס לאנך המרכזי. מהו המרחק בין 2 נקודות חושך סמוכות? מהו המרחק בין 2 נקודות אור סמוכות?

ב. מניחים זכוכית (מקדם שבירה 1.5) על הסדק העליון שעוביה 0.2 מיקרומטר. היכן יהיו הנקודות שמצאת בסעיף א כעת?

ניסוי יאנג בסדק יחיד: מבצעים ניסוי יאנג בסדק יחיד שרוחבו 0.5 מ`מ. הניסוי מבוצע ע`י לייזר אדום באורך גל של 650 ננומטר. מרחק המסך מהסדקים הוא 100 ס`מ.

ג. יש למצוא מהו רוחב כתם האור המרכזי (המרחק בין 2 נקודות חושך סמוכות לאנך המרכזי).

פתרון

נקבע את ראשית הצירים להיות המרכז בין הסדקים, כך שהסדקים נמצאים בנקודות $\left(0, \pm\frac{d}{2}\right)$, כאשר $d = 0.16mm$ המרחק בין הסדקים. נביט על נקודה הנמצאת בזוית θ מהאנך המרכזי על המסך, כלומר בנקודה $(L, L\tan\theta)$ כאשר $L = 100cm$ המרחק בין המרכז בין הסדקים למסך. המרחק שהאור עובר מהסדק העליון, l_+והתחתון l_- ועד לנקודה שנמצאת בזוית θ לאנך מהמרכז בין שני הסדקים לאנך הינו:

$$l_{\pm} = L\sqrt{1 + \left(\tan\theta \mp \frac{d}{2}\right)^2} \approx L\frac{1}{\cos\theta} \mp \frac{d}{2}\sin\theta$$

כאשר השתמשנו בפיתוח לסדר ראשון של טור טיילור עבור $\frac{L}{d}$ סביב 0 ובכך ש $1 + \tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$.

הפרש המרחקים הינו:

$$\Delta l = l_- - l_+ = d\sin\theta$$

נקודות אור יתקבלו כאשר ההפרש יהיה מספר שלם של אורכי גל:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}m$$

כאשר m מספר שלם כלשהו.

נקודות חושך יתקבלו כאשר ההפרש יהיה מספר שלם ועוד חצי אורך גל:

$$\sin\theta = \frac{\lambda}{d}\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

במקרה שלנו $d = 0.16mm \gg \lambda = 650nm$ ולכן $\theta \ll 1$ ונוכל לומר כי מרחק הנקודות מהאנך המרכזי הינו $L\tan\theta \approx L\theta$ כאשר נקודות אור יתקבלו במרחקים:

$$\frac{\lambda L}{d}m = 4062.5\mu m \cdot m$$

ונקודות חושך במרחקים:

$$\frac{\lambda L}{d}\left(m + \frac{1}{2}\right) = 4062.5\mu m\left(m + \frac{1}{2}\right)$$

המרחק בין שתי נקודות אור סמוכות זהה למרחק בין שתי נקודות חושך סמוכות והוא 4062.5 מיקרו מטר.

שלוש נקודות האור הראשונות ביחס לאנך יתקבלו במרחקים $0, 4062.5\mu m, 8125\mu m$ מהאנך ושלוש נקודות החושך הראשונות במרחקים $2031.25\mu m, 6093.75\mu m, 10156.25\mu m$ מהאנך.

ב. אנחנו רוצים לחשב את הפרש הפאזה בין הגלים שנוצר בגלל הזכוכית. בזמן מעבר הזכוכית בעובי $\Delta x = 0.2\mu m$ הגל שעובר בזכוכית צובר פאזה $\varphi' = k'\Delta x = \frac{\omega}{v'}\Delta x = \frac{\omega n}{c}\Delta x$ כאשר k' מספר הגל בזכוכית ו v' מהירות הגל בזכוכית. הגל שלא עובר בזכוכית צובר פאזה $\varphi = \frac{\omega}{c}\Delta x$. לכן הפרש הפאזות שנוצר $\Delta\varphi = \frac{\omega}{c}\Delta x\,(n-1)$.

התדירות הזוויתית של הגל נשארת זהה במעבר בין תווכים והיא $\omega = ck = \frac{2\pi c}{\lambda}$ לכן הפרש הפאזות שנוצר כתוצאה מהזכוכית $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\Delta x\,(n-1) = \frac{2\pi}{650\cdot10^{-9}} \cdot 0.2 \cdot 10^{-6} \cdot 0.5 = \frac{4}{13}\pi$.

הפרש פאזות זהה היה נוצר אילו, במקום הוספת הזכוכית, הגל שעבר בסדק העליון היה עובר מרחק גדול יותר ב $\frac{4}{13}\pi\frac{1}{k} = \frac{2}{13}\lambda = 100nm$. לכן, נקודות אור יווצרו כאשר $l_+ + 100nm - l_- = \lambda m$ וע"י שימוש בתוצאה מהסעיף הקודם נקבל כי נקודות האור יהיו במרחקים:

$$L\tan\theta \approx L\sin\theta = \frac{\lambda m + 100nm}{d}L = 4062.5\mu m \cdot m + 833.33\mu m$$

מהאנך המרכזי.

נקודות החושך יווצרו כאשר $l_+ + 100nm - l_- = \lambda\left(m + \frac{1}{2}\right)$, כלומר במרחקים:

$$L\tan\theta \approx L\sin\theta = \frac{\lambda\left(m + \frac{1}{2}\right) + 100nm}{d}L = 4062.5\mu m \cdot m + 2864.58\mu m$$

ג. עוצמת האור הפוגע במסך לאחר התאבכות מסדק בודד:

$$I \propto sinc^2\left(\frac{d}{2}k\sin\theta\right)$$

נקודות המינימום הראשונות יתקבלו כאשר

$$\frac{d}{2}k\sin\theta_{\pm}=\pm\pi\Rightarrow\sin\theta_{\pm}=\pm\frac{2\pi}{kd}=\pm\frac{\lambda}{d}=\pm4062.5\cdot10^{-6}$$

קיבלנו כי בנקודות המינימום הראשונות $1 \gg \sin\theta_{\pm}=\pm4062.5\cdot10^{-6}$ ולכן לומר שגם $\theta \ll 1$ ולקרב את רוחב כתם האור המרכזי ע"י:

$$L\left(\tan\theta_{+}-\tan\theta_{-}\right)\approx L\left(\sin\theta_{+}-\sin\theta_{-}\right)=8125\mu m$$

חבילת גלים

חבילת גלים (פולס קול) נכנסת לתוך תווך בו יחס הנפיצה הוא $\omega^2 = \omega_0^2 + k^2 v_s^2$ כאשר ω היא התדירות הזוויתית, k הוא וקטור הגל, $v_s = 340m/s$ היא מהירות הקול ו ω_0 קבוע.

א) מצא\י את מהירות החבורה ומהירות הפאזה, ומצא\י את ערכו של ω_0 כך שהפולס יישאר ממוקם (כלומר, המעטפת והגל שבתוכה ינועו באותו קצב).

ב) נתון כי פולס זהה נוסף נכנס לתוך התווך בזווית $\theta = 7^\circ$ כ־ $0.5msec$ לפני הפולס הראשון כמתואר באיור. בנוסף, ידוע כי ביציאה מהתווך שני הפולסים מתאבכים התאבכות הורסת. מהו אורך התווך המינימאלי אם נתון כי אורך הגל (המרכזי) של הפולס הוא $\omega_0 = 4rad/s, \lambda = 2\pi v_s/\omega_0$.

פתרון

א. מהירות הפאזה $\frac{\sqrt{\omega_0^2+k^2v_s^2}}{k} = \frac{\omega}{k} = v_{ph}$ מהירות החבורה $v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{kv_s^2}{\sqrt{\omega_0^2+k^2v_s^2}}$. על מנת שהפולס יישאר ממוקם מהירות הפאזה והחבורה צריכות להיות שוות:

$$v_{ph} = v_g \Rightarrow \frac{\sqrt{\omega_0^2 + k^2v_s^2}}{k} = \frac{kv_s^2}{\sqrt{\omega_0^2 + k^2v_s^2}} \Rightarrow$$

$$\omega_0^2 + k^2v_s^2 = k^2v_s^2 \Rightarrow \omega_0 = 0$$

ב. נסמן את אורך התווך ב L. המרחק שעבר הפולס הראשון הוא L.

המרחק שעבר הפולס השני הוא $\frac{L}{\cos\theta}$. בנוסף הפולס השני צבר פאזה π בשל ההחזרה משפת התווך. הפרש פאזה נוסף בין הפולסים נוצר בשל הפרש הזמנים, הפולס השני נכנס לתווך $\Delta t = 0.5msec$ לפני הפולס הראשון ולכן יש ביניהם הפרש פאזה נוסף של $\omega\Delta t$. במקום להתשמש בהפרשי הפאזה נוכל לומר כי הגל השני "עבר" מרחק גדול יותר ב $\frac{\pi+\omega\Delta t}{2\pi}\lambda$ (זה יוצר את אותו הפרש פאזה כמו במציאות כי במצב זה הפרש הפאזה יהיה $\frac{\pi+\omega\Delta t}{2\pi}\lambda k = \pi + \omega\Delta t$). במצב זה נוכל להשתמש בנוסחה מהכיתה להתאבכות הורסת:

$$\frac{\pi + \omega\Delta t}{2\pi}\lambda + \frac{L}{\cos\theta} - L = \lambda n + \frac{1}{2}\lambda \Rightarrow$$

$$L = \frac{\lambda\left(n + \frac{1}{2} - \frac{\pi+\omega\Delta t}{2\pi}\right)}{\frac{1}{\cos\theta} - 1}$$

נציב נתונים: $\lambda = \frac{2\pi v_s}{\omega_0} = \frac{2\pi\cdot 340}{4}m = 534m$

ו $\omega = \sqrt{\omega_0^2 + \left(\frac{2\pi v_s}{\lambda}\right)^2} = \sqrt{\omega_0^2 + \omega_0^2} = \sqrt{2}\omega_0 = 5.66\frac{1}{s}$

ונקבל:

$$L=\frac{534\left(n+\frac{1}{2}-\frac{\pi+5.66\cdot 0.5\cdot 10^{-3}}{2\pi}\right)}{\frac{1}{\cos\left(7\cdot\frac{2\pi}{360}\right)}-1}m\approx 71107\left(n+0.499\right)m$$

L המינימאלי יתקבל עבור $n=0$:

$$L\approx 35km$$