$$f(x) = e^{-a|x|} \tag{1}$$

The Fourier transform:

$$\begin{aligned}
\hat{f}(k) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-a|x|} e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{ax} e^{-ikx} dx \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{-ikx} dx + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} e^{ikx} dx \\
&= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx
\end{aligned} \tag{2}$$

The last integral can be solved using integration by parts, twice:

$$\begin{aligned}
\int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx &= \left. \frac{e^{-ax} \sin(kx)}{k} \right|_{0}^{\infty} + \frac{a}{k} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin(kx) dx \\
&= \frac{a}{k} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \sin(kx) dx \\
&= - \left. \frac{a}{k^2} e^{-ax} \cos(kx) \right|_{0}^{\infty} - \frac{a^2}{k^2} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx \\
&= \frac{a}{k^2} - \frac{a^2}{k^2} \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx
\end{aligned} \tag{3}$$

solving the equation:

$$\begin{aligned}
\left(1 + \frac{a^2}{k^2}\right) \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx &= \frac{a}{k^2} \\
\Rightarrow \int_{0}^{\infty} e^{-ax} \cos(kx) dx &= \frac{a}{a^2 + k^2}
\end{aligned} \tag{4}$$

Finally the Fourier of the exponent is a Lorentzian function:

$$\hat{f}(k) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + k^2} \tag{5}$$

רוחב חבילת גלים בזמן

נניח שיש לנו חבילת גלים $\psi\left(t\right) = Ae^{i\omega_0 t}\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{i\frac{m\Delta\omega t}{N-1}}$ שמורכבת מסכום N גלים בעלי אמפליטודות זהות A אך תדירויות זוויתית שונות $\omega_m = \omega_0 + \frac{m\Delta\omega}{N-1}$ ו $m = -\frac{N-1}{2}, -\frac{N+1}{2}, ..., \frac{N-1}{2}$, $\omega_0, \Delta\omega$ קבועים בעלי יחידות של תדירות זוויתית. כלומר החבילה שלנו מורכבת מגלים בעלי תדר סביב ω_0 כאשר רוחב החבילה בתדר $\Delta\omega$.

א. הסבר בעזרת ציור (מעגל היחידה) ומתמטיקה מהו רוחב חבילת הגלים בזמן?

ב. איזה יחס מינימלי מתקיים בין הרוחב בזמן לרוחב בתדר?

ג. הסבר צורה אינטואיטיבית (תוך שימוש בשפה של התאבכות) מה בעצם קורה.

פתרון

א. חבילת הגלים שלנו נראית כך:

$$\psi\left(t\right) = Ae^{i\omega_0 t}\sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{i\frac{m\Delta\omega t}{N-1}}$$

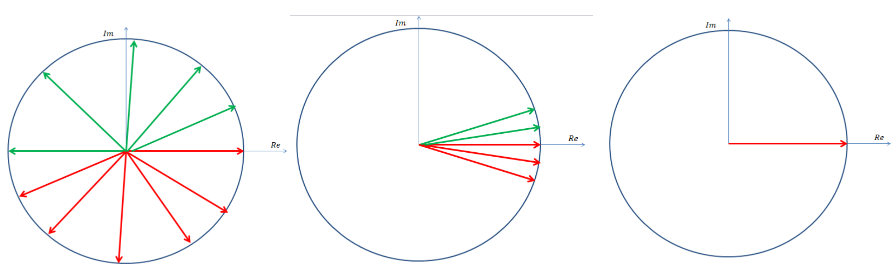
נסמן $\tilde{\psi}\left(t\right) = \sum_{m=-\frac{N-1}{2}}^{\frac{N-1}{2}} e^{i\frac{m\Delta\omega t}{N-1}}$ (זה החלק שיוצר את המעטפת, החלק $Ae^{i\omega_0 t}$ הוא גל הרמוני שמתקדם בזמן)

נתאר את החבילה ע"י ציור $\tilde{\psi}$. הגודל (הנורמה) של כל איבר בסכום היא 1 ולכן בכל זמן $\tilde{\psi}\left(t\right)$ מורכב מסכום של מספרים מרוכבים בעלי גודל 1. כל מספר כזה ניתן לתאר ע"י וקטור במישור המרוכב כאשר של הוקטורים נמצאים על מעגל ברדיוס 1 סביב הראשית.

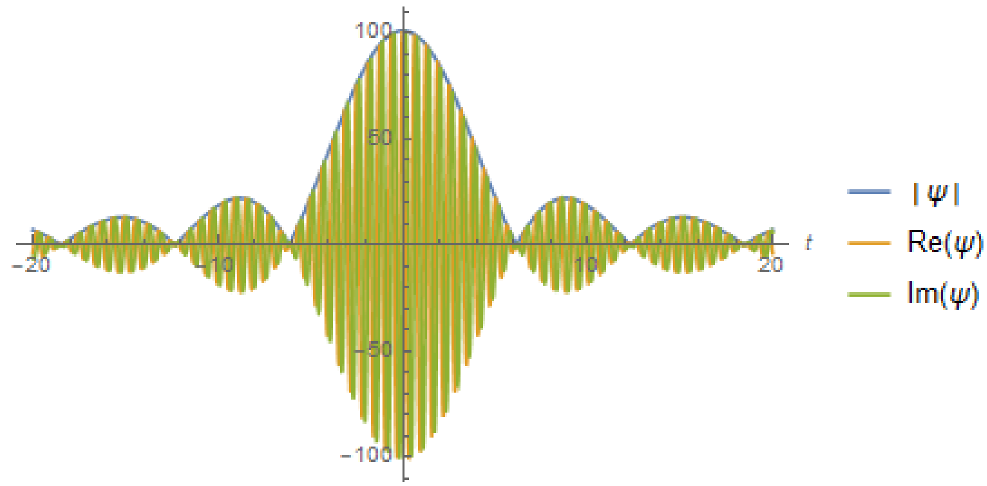
בזמן $t = 0$ כל הוקטורים מצביעים לכיוון הציר הממשי (כי כל המספרים המרוכבים $e^{i\frac{m\Delta\omega t}{N-1}} = 1$ עבור $t = 0$).

כאשר חולף הזמן כל וקטור יסתובב בקצב מעט שונה ולכן הוקטורים יתרחקו זה מזה עם הזמן.

איור 1 מסכם את השלבים השונים בהתפתחות החבילה. באיור 2 ניתן לראות את $\left|\psi\right|, Re\left[\psi\right], Im\left[\psi\right]$ כפונקציה של t.



איור 1: חבילת הגלים במישור המרוכב. בזמן $t = 0$ (איור ימני) כל הגלים בפאזה זהה. בזמן $0 < t < \Delta t$ הגלים מתחילים לצבור פאזה שונה (איור מרכזי) בזמן $t = \Delta t$ הפאזות התפזרו על כל מעגל היחידה ולכל גל אדום יש גל ירוק שמבטל אותו (מתאבך איתו בהתאבכות הורסת, איור שמאלי).



איור 2: $|\psi|, Re[\psi], Im[\psi]$ כפונקציה של t

הגודל של $\tilde{\psi}$ יהיה מינימאלי כאשר הוקטורים הקיצוניים יגיעו אחד לשני ויתבטלו עם הוקטורים הכי איטיים. רוחב חבילת הגלים בזמן נקבע לפי הזמן שחולף מגודל מעטפת מקסימאלי לגודל מינימאלי.

הוקטורים הכי מהירים הם $Ae^{\pm i\frac{\Delta\omega}{2}t}$ והזמן שייקח להם לבטל את הוקטור הכי איטי, $e^{i\cdot 0}=1$, הוא הזמן שייקח להם לעבור חצי סיבוב, כלומר $\frac{\Delta\omega}{2}\Delta t=\pi\Rightarrow\Delta t=\frac{2\pi}{\Delta\omega}$.

ב.המקרה של חבילת הגלים שלנו הוא המקרה בו ייקח הזמן הכי קצר עד שגודל חבילת הגלים יהיה מינימאלי. זאת כיוון שלקחנו חבילת גלים בה לכל גל יש גל עם מספר גל הפוך. במקרה הכללי יכול לקחת יותר ממחזור אחד עד לביטול. לכן תמיד מתקיים:

$$\Delta t\geq\frac{2\pi}{\Delta\omega}$$

וזה נותן לנו את היחס המינימאלי בין הרוחב בזמן לרוחב בתדר:

$$\Delta t\Delta\omega=2\pi$$

ג. ניתן להסביר את התופעה ע"י התאבכות. ברגע $t=0$ כל הגלים שמרכיבים את החבילה שלנו בעלי אותה פאזה ולכן מתאבכים בהתאבכות בונה ואמפליטודת חבילת הגלים מקסימאלית. כאשר הזמן עובר יש יותר ויותר צמדי גלים בחבילה שהינם בעלי פאזה הפוכה (כלומר עם הפרש π בין הפאזה של הראשון לזו של השני) שמתאבכים בהתאבכות הורסת. לאחר Δt לכל אח מהגלים יש גל אחר להתאבך איתו בהתאבכות הורסת (בקירוב טוב) ולכן האמפליטודה של חבילת הגלים תהיה קטנה מאוד ביחס לאמפליטודה ההתחלתית.

exercise 3_3400

עבור גלי אור, מגדירים את מקדם השבירה להיות $n=\frac{c}{v_\phi}$ כאשר v_φ מהירות הפאזה. נתון $n^2=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$.

א) הראה\י כי $\omega^2=\omega_0^2+c^2k^2$ (שים/י לב כי k יכול להיות מרוכב).

ב) עבור המקרה $\omega>\omega_0$, מהי מהירות הפאזה ומהירות החבורה עבור גלים אלה?

ג) הראה/י שבתדירויות $\omega\geq\omega_0$ מתקיים $v_g\leq c\leq v_\phi$.

ד) מהו תחום התדירויות הזוויתיות ω , שבו k^2 הוא שלילי? מה היא המשמעות ? מה יקרה לגל בעל k^2 שלילי?

א)

$$\left(\frac{c^2}{V_\phi^2}=\right)\frac{c^2}{V_\phi^2}=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$\boxed{V_\varphi\equiv\frac{\omega}{k}}$$

הגדרת מהירות פאזה

$$\Downarrow$$

$$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{\omega^2=c^2k^2+\omega_0^2}$$

וזה נדרש

ב) נתון

$$\omega>\omega_0 \Leftarrow 0<\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)<1 \quad (*)$$

$$\boxed{\text{לכן} \ (*) \quad k>0}$$

מהירות פאזה

$$V_\varphi\equiv\frac{\omega}{k}=\frac{\sqrt{c^2k^2+\omega_0^2}}{k}=\sqrt{c^2+\frac{\omega_0^2}{k^2}}$$

דרך א'

$$V_{group}\equiv\frac{d\omega}{dk}=\frac{d}{dk}\sqrt{c^2k^2+\omega_0^2}=\frac{2c^2k}{2\sqrt{c^2k^2+\omega_0^2}}$$

$$=\frac{c^2k}{\sqrt{c^2k^2+\omega_0^2}}$$

דרך ב'

$$V_{group}=\frac{d\omega}{dk} \qquad \omega^2=c^2k^2+\omega_0^2$$

$$\Downarrow$$

$$2\omega\, d\omega=2kc^2dk \Rightarrow V_g=\frac{d\omega}{dk}=\frac{c^2}{\left(\frac{\omega}{k}\right)}$$

מהירות פאזה

ב) מכיוון ש $0<\left(1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}\right)<1$ אז מקבלים ש $k>0$

(שימוש בקיטוי $\frac{c^2k^2}{\omega^2}=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$)

לכן $\frac{\omega_0^2}{k^2}>0$

$$\Downarrow$$

$$V_\varphi=\sqrt{c^2+\frac{\omega_0^2}{k^2}}\geq c$$

על כן מהירות הפאזה גדולה או שווה ל c

$$V_{group}=c\cdot\underbrace{\frac{c}{V_\varphi}}$$

$$\frac{c}{V_\varphi}\leq 1$$

$$\Downarrow$$

$$V_{group}\leq c$$

$$\boxed{V_g\leq c\leq V_\varphi}$$

ג) $$\frac{c^2k^2}{\omega^2}=1-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}<0$$

$$\Downarrow$$

$$k^2<0 \Leftarrow \omega^2<\omega_0^2$$

$$\Downarrow$$

K מרוכב

K מרוכב היינו גל שדועך עם התקדמותו במרחב, ולכן תדרים אלו "נעלמו" עם ההתקדמות במרחב.

e_66_1_007

$$a(k)=\begin{cases}1, & |k-k_0|\le k_1\\ 0, & |k-k_0|>k_1\end{cases}$$

חבילת הגלים!

$$\omega=\omega_0+\alpha(k-k_0) \qquad \alpha\equiv\left.\frac{d\omega}{dk}\right|_{k=k_0}$$

$$\Psi(x,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}a(k)\,e^{i(kx-\omega t)}\,dk=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{k_0-k_1}^{k_0+k_1}e^{i(kx-\omega_0 t-\alpha(k-k_0)t)}\,dk=\left|\begin{matrix}z=k-k_0\\ dz=dk\end{matrix}\right|=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-k_1}^{k_1}e^{i(zx-\alpha zt)}\,dz\;e^{i(k_0x-\omega_0 t)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-k_1}^{k_1}e^{iz(x-\alpha t)}\,dz\;e^{i(k_0x-\omega_0 t)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi}e^{i(k_0x-\omega_0 t)}\frac{1}{i(x-\alpha t)}\left(e^{ik_1(x-\alpha t)}-e^{-ik_1(x-\alpha t)}\right)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\frac{\sin[k_1(x-\alpha t)]}{x-\alpha t}\,e^{i(k_0x-\omega_0 t)}$$

$\xi=x-\alpha t$, $\frac{\sin\xi k_1}{\xi}$ קיבלנו גל שהמעטפת שלו היא

המעטפת נעה במהירות (החבורה) α.

$v_p=\frac{\omega_0}{k_0}$ - מהירות הפאזה.

עבור $k_1\ll k_0$ האיבר $e^{i(k_0x-\omega_0 t)}$ מתאר גל הרמוני המתקדם

בתוך המעטפת.