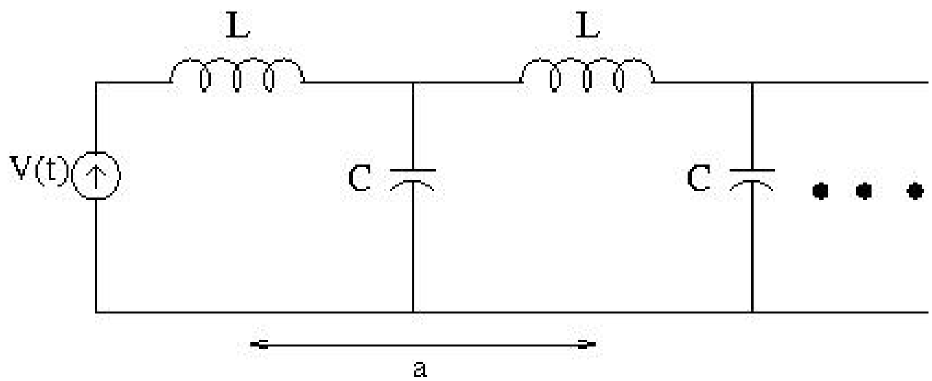

איור 1:

תיאום עכבות בקו תמסורת

נתון קו התמסורת הבא:
כאשר $V(t) = V_0 \cos\omega t$.

1. מצא את העכבה של קו התמסורת בגבול הרצף $a \to 0$.
2. בסוף קו התמסורת בצד ימין מחברים עומס Z_L. מה צריך להיות העומס Z_L כדי שלא יווצר גל חוזר בקו התמסורת?

פתרון

1. בעזרת חוקי קירכהוף נקבל:

$$\dot{Q}_0 = I_0 - I_1$$

$$V = L\dot{I}_0 + \frac{Q_0}{C}$$

נגזור את המשוואה השנייה ונציב את הראשונה:

$$\dot{V} = \ddot{I}_0 + \frac{\dot{Q}_0}{C} \Rightarrow \dot{V} = L\ddot{I}_0 + \frac{I_0 - I_1}{C}$$

נרשום את המשוואה ע"י הקיבול וההשראות ליחידת אורך:

$$\dot{V} = a\mathcal{L}\ddot{I}_0 + \frac{I_0 - I_1}{a\mathcal{C}}$$

בגבול $a \to 0$ האיבר האחרון ייתן נגזרת ראשונה של I ב $x = 0$ ואילו האיבר עם $\ddot{I}_0$ יתאפס. נקבל:

$$\frac{\partial V(t)}{\partial t} = -\frac{1}{\mathcal{C}} \frac{\partial I(x=0,t)}{\partial x}$$

ב $x = 0$ נתון כי $V(t) = V_0 \cos \omega t$
ננחש פתרונות של גלים נעים עבור I $I(x,t) = I_0 \cos(\omega t - Kx)$, כאשר ניחשנו שהפאזה של I ו V זהות כי נגזרותיהם זהות, נציב ונקבל ב $x = 0$:

$$-\omega V_0 \sin(\omega t) = -\frac{K}{\mathcal{C}} I_0 \sin(\omega t) \Rightarrow Z = \frac{V_0}{I_0 \mathcal{C}} = \frac{K}{\omega \mathcal{C}} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$$

כאשר $\mathcal{L} = \frac{L}{a}$ ההשראות בקו ליחידת אורך.
2. מקדם ההחזרה מהמעבר בין קו התמסורת לעומס Z_L הוא:

$$R = \frac{Z - Z_L}{Z + Z_L}$$

ובכדי שלא תהיה החזרה, כלומר $R = 0$ נדרוש $Z = Z_L$, זה נקרא "תיאום עכבות".
כלומר נדרוש

$$Z_L = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$$

קו תמסורת

נתון קו התמסורת הבא, כל הקבלים פרוקים בזמן $t=0$:

1. נסמן את הזרם ב"בלוק" ה n (שכולל שני סלילים וקבל ביניהם) I_n. השתמש בחוקי קירכהוף וכתוב את הקשר בין I_n ל I_{n+1}.
2. השתמש בהגדרות עבור הקיבולים ליחידת אורך $\mathcal{C}=\frac{C}{a}$ וההשראות ליחידת אורך $\mathcal{L}=\frac{L}{a}$ ומצאו מהי המשוואה הדיפרנציאלית אותה מקיים הזרם $I\left(x,t\right)$ בגבול בו $a,C,L\to 0,C_0\to\infty$ אבל C_0a והקיבול וההשראות ליחידת אורך נשארים קבועים. (רמז: חלק את המשוואה ב a וזהו את הגדרת הנגזרת השנייה באחד האיברים)
3. הראה שהמשוואה שקיבלת היא משוואת גלים ע"י כך שתראה כי הניחוש $I=A\cos\left(\omega t-Kx\right)$ פותר את המשוואה. מהו יחס הדיספרסיה? האם הוא לינארי?

פתרון

המתח על כל סליל הוא $-\frac{L}{2}\dot{I}_n$, המתח על הקבל בין הסלילים $\frac{Q_{0n}}{C_0}$ והמתח על הקבל משמאל לבלוק $\frac{Q_n}{C}$.

מחוק קירכהוף עבור צמתים: "הזרם הנכנס והיוצא מכל צומת שווה" נקבל כי

$$\dot{Q_n}=I_{n-1}-I_n \tag{1}$$

מחוק קירכהוף עבור לולאות: "סכום המתחים בלולאה סגורה הוא אפס" נקבל:

$$\frac{Q_{n-1}}{C}-\frac{L}{2}\dot{I}_n-\frac{Q_{0n}}{C_0}-\frac{L}{2}\dot{I}_n-\frac{Q_{n+1}}{C}=0 \tag{2}$$

בנוסף השינוי במטען על הקבל שבין הסלילים שווה לזרם:

$$\dot{Q_{n0}}=I_n \tag{3}$$

נגזור את משוואה 2 ונציב את 1 ו 3:

$$-\frac{I_n}{C_0}-L\ddot{I_n}+\frac{I_{n+1}-2I_n+I_{n-1}}{C}=0$$

בגבול הרצף $I_n=I\left(x,t\right)$ כאשר $x=an$. נקבל:

$$\frac{I\left(x,t\right)}{C_0}+L\ddot{I}\left(x,t\right)-\frac{I\left(x+a,t\right)-2I\left(x,t\right)+I\left(x-a,t\right)}{C}=0$$

נחלק את המשוואה ב a

$$\frac{I(x,t)}{aC_0}+\frac{L}{a}\ddot{I}(x,t)-\frac{I(x+a,t)-2I(x,t)+I(x-a,t)}{aC}=0\Rightarrow$$

$$\frac{I(x,t)}{aC_0}+\mathcal{L}\ddot{I}(x,t)-\frac{I(x+a,t)-2I(x,t)+I(x-a,t)}{a^2\mathcal{C}}=0$$

ונזהה את הגדרת הנגזרת השנייה:

$$\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}=\lim_{a\to 0}\frac{I(x,t)-I(x-a,t)}{a}$$

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2}=\lim_{a\to 0}\frac{\frac{\partial I(x+a,t)}{\partial x}-\frac{\partial I(x,t)}{\partial x}}{a}=\lim_{a\to 0}\frac{\frac{I(x+a,t)-I(x,t)}{a}-\frac{I(x,t)-I(x-a,t)}{a}}{a}=$$

$$\lim_{a\to 0}\frac{I(x+a,t)-2I(x,t)+I(x-a,t)}{a^2}$$

נקבל בגבולות הנתונים

$$\mathcal{L}\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2}=-\frac{I(x,t)}{aC_0}+\frac{1}{\mathcal{C}}\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2}$$

ג. נציב את הניחוש הנתון במשוואה:

$$-\omega^2\mathcal{L}A\cos(\omega t-Kx)=-\frac{1}{aC_0}A\cos(\omega t-Kx)-\frac{K^2}{\mathcal{C}}A\cos(\omega t-Kx)\Rightarrow$$

$$\omega^2\mathcal{L}=\frac{1}{aC_0}+\frac{K^2}{\mathcal{C}}$$

הניחוש פותר את המשוואה אם מתקיים יחס הדיספרסיה:

$$\omega=\sqrt{\frac{1}{C_0L}+\frac{K^2}{\mathcal{C}\mathcal{L}}}$$

קיבלנו יחס דיספרסיה לא לינארי, כלומר מהירות פאזה וחבורה שונות עבור הזרם בקו התמסורת.

החזרה מ3 שכבות

בריכת זכוכית הכוללת מים על משטח זכוכית מהווה מערכת 3 שכבות של אוויר $(n = 1)$ מים $(n = 1.33)$ וזכוכית $(n = 1.5)$. הבריכה מלאה במים בגובה $H = 1m$. מאירים באור נראה ירוק (450 ננומטר) את הבריכה במאונך למשטח, אמפליטודת השדה החשמלי ההתחלתית $E_i = 1\frac{N}{C}$. חלק מהאור מוחזר וחלק מהאור מועבר אל תוך הזכוכית (דרך המים) כאן נזניח החזרות מסדר שני ומעלה.

א. מהו מספר הגל והתדירות הזוויתית בכל תווך?

ב. מהו הביטוי עבור הגל המועבר לתוך הזכוכית? (לא לשכוח פאזה, אין צורך להציב מספרים בביטוי הזופי עבור מספר הגל והתדירות הזוויתית)

ג. מהו הביטוי עבור הגל החוזר לאוויר (לא לשכוח פאזה, אין צורך להציב מספרים בביטוי הסופי עבור מספר הגל והתדירות הזוויתית)

ד. מה צריך להיות עובי שכבת המים כדי שהאנרגיה המוחזרת תהיה מינימאלית (תזכורת: האנרגיה המוחזרת פרופורציונאלית לערך המוחלט של האמפליטודה המוחזרת בריבוע)?

פתרון

א.

ראשית נמצא את מספר הגל באויר: $K_1 = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi}{450\cdot10^{-9}} = 1.4\cdot10^7\frac{rad}{m}$ ואת התדירות הזויתית לפי יחס הדיספרסיה $\omega = vK_1 = \frac{c}{n_1}K_1 = 4.2\cdot10^{15}\frac{rad}{s}$.

כעת נוכל גם למצוא את מספרי הגל במים ובזכוכית:

$$K_2 = \frac{n_2}{c}\omega = 1.86\cdot10^7\frac{rad}{m}$$

$$K_3 = \frac{n_3}{c}\omega = 1.86\cdot10^7\frac{rad}{m}$$

ב.

הגל ההתחלתי נע בכיוון השלילי של ציר y:

$$\psi_i(y,t) = E_i e^{i(\omega t + Ky)}$$

את הגל המועבר לזכוכית נוכל לחשב ע"י מקדם ההעברה מהאויר למים:

$$T_{12} = \frac{2}{1+1.33} = 0.86$$

צבירת פאזה בזמן ההתקדמות במים:

$$e^{-iK_2H}$$

ומקדם ההעברה מהמים לזכוכית

$$T_{23}=\frac{1.33}{1.33+1.5}=0.47$$

בסך הכל נקבל כי את הגל המועבר מהאויר לזכוכית ניתן לתיאור ע"י:

$$\psi_t\left(y,t\right)=E_iT_{12}e^{-iK_2H}T_{23}e^{i(\omega t+K_2y)}=0.4e^{i(\omega t+yK_1-K_2H)}\ \tfrac{N}{C}$$

או כביטוי ממשי:

$$\psi_t\left(y,t\right)=0.4\cos\left(\omega t+yK_1-K_2H\right)\ \frac{N}{C}$$

ג. הגל החוזר לאויר מורכב מהגל שמוחזר ישירות מהמעבר בין האויר למים ומהגל שמוחזר מהמעבר מהמים לזכוכית (ואנחנו מזניחים החזרות מסדר שני ומעלה). האמפליטודה של הגל המוחזר:

$$E_i\left(R_{12}+T_{12}e^{-iK_2H}R_{23}e^{-iK_2H}T_{21}\right)=E_i\left(\frac{1-1.33}{1+1.33}+0.86e^{-iK_2H}\frac{1.33-1.5}{1+1.33}e^{-iK_2H}\frac{2\cdot 1.33}{1.33+1.5}\right)=$$

$$-E_i\left(0.14+0.06e^{-2iK_2H}\right)=-\left(0.14+0.06e^{-2iK_2H}\right)\frac{N}{C}$$

ולכן הביטוי לגל המוחזר הינו:

$$\psi_r\left(y,t\right)=-\left(0.14e^{i(\omega t-K_1y)}+0.06e^{i(\omega t-K_1y-2K_2H)}\right)\frac{N}{C}$$

ובהצגה ממשית:

$$\psi_r\left(y,t\right)=-\left(0.14\cos\left(\omega t-K_1y\right)+0.06\cos\left(\omega t-K_1y-2K_2H\right)\right)\frac{N}{C}$$

ד. הביטוי לאמפליטודת הגל המוחזר הוא

$$E_r=-\left(0.14+0.06e^{-2iK_2H}\right)\frac{N}{C}$$

האנרגיה המוחזרת פרופורציונאלית לאמפליטודה המוחזרת בריבוע:

$$Returned\ Energy \propto |E_r|^2 = \left(0.14 + 0.06e^{-2iK_2H}\right)\left(0.14 + 0.06e^{2iK_2H}\right) =$$

$$0.02 + 0.0084\left(e^{-2iK_2H} + e^{2iK_2H}\right) + 0.0036 \approx$$

$$0.02 + 0.017\cos\left(2K_2H\right)$$

האנרגיה המקסימאלית תתקבל כשהקוסינוס יהיה מקסימאלי, כלומר עבור:

$$2K_2H = 2\pi l \Rightarrow H = \frac{\pi}{K_2} l \approx 16.9 \cdot l\ \mu m$$

כאשר l מספר שלם כלשהו.