פריזמה

נתונה פריזמה (מנסרה) משולשת ישרת זוית עם זוית ראש α, ובגובה l (כמו באיור). הפריזמה עשויה מזכוכית עם מקדם שבירה תלוי תדירות $n(f) = \frac{f}{f_0} > 1$ כאשר f_0 קבוע. (לאויר מקדם שבירה $n \approx 1$).

קרן של אור פוגעת במאונך לצלע הפריזמה בגובה התחלתי y_i. במרחק d מהפריזמה מניחים מסך.

נניח שקרן האור היא מונוכרומטית (כלומר בעלת תדר בודד) עם אורך גל λ.

א. מהי התדירות של האור הפוגע (מהירות האור באויר כמעט זהה למהירות האור בואקום $c \approx 3 \cdot 10^8 \frac{m}{s}$)?

ב. מהי הזוית α הגדולה ביותר האפשרית כך שקרן האור תעבור את הפריזמה ותגיע למסך?

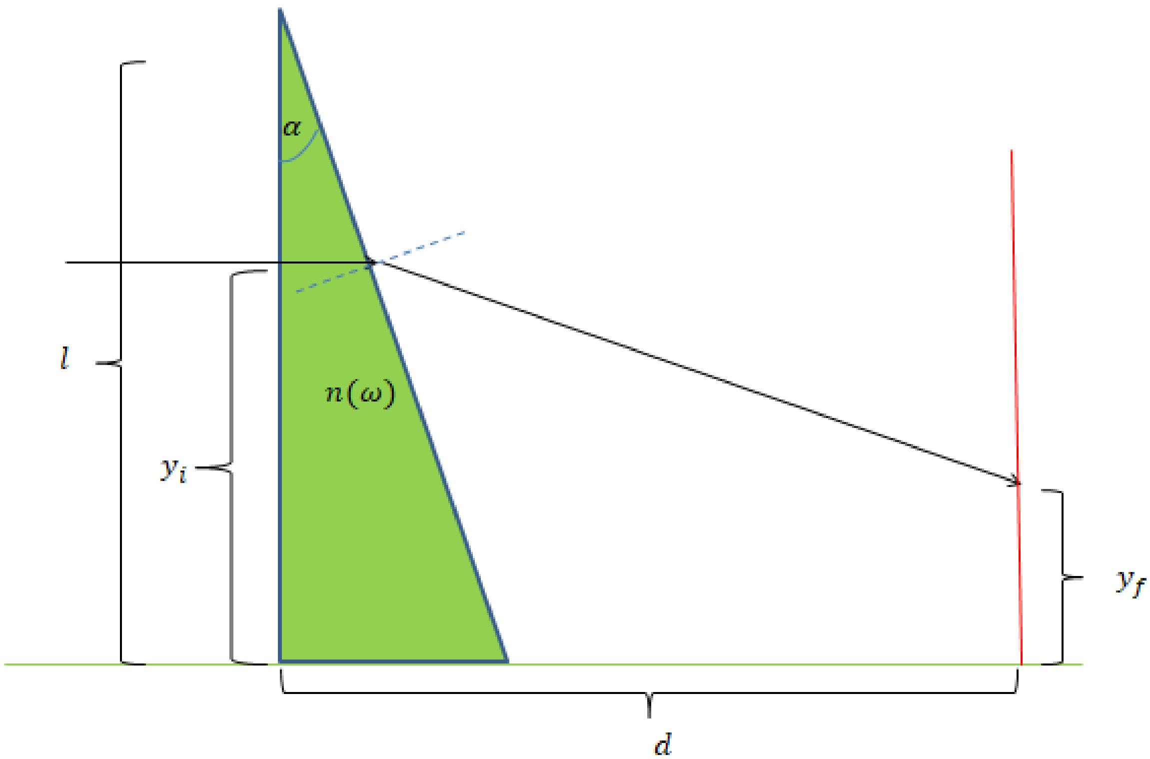
ג. כתוב ביטוי לגובה בו תפגע הקרן במסך, y_f ע"י נתוני השאלה.

ד. נתון כעת כי $\alpha \ll 1$ ו$\frac{f}{f_0} \sim 1$ (כלומר f מאוד קרוב ל f_0) קרב את הביטוי שקיבלת בטור טיילור עד לסדר ראשון בα.

נתון: $d = 10cm$, $l = 10cm$, $\alpha = 0.1rad$, $f_0 = 3 \cdot 10^{14} Hz$, $y_i = 9cm$

ה. כעת במקום אור מונוכרומטי שולחים אור לבן שמורכב מכל אורכי הגל של האור הנראה: $380 - 750$ ננו־מטר. השתמש בביטוי המקורב שקיבלת בכדי לחשב מהו גובהו של כתם האור שיתקבל על המסך?

ו. באיזה גובה יפגע אור כתום על המסך (אורך גל של אור כתום הוא 600 ננו־מטר)? באיזה גובה יפגע אור ירוק (אורך גל של אור ירוק הוא 500 ננו־מטר)?



איור 1: פריזמה

פתרון

א. אנחנו יודעים כי עבור אור c היא מהירות הפאזה באויר ולכן $c = \frac{\omega}{k} = \lambda f$ לכן תדירות האור הפוגע $f = \frac{c}{\lambda}$.

ב. מגיאומטריה פשוטה נקבל כי הזוית מהאנך שבה פוגע האור בצלע השמאלית של הפריזמה שווה ל α. הזוית הקריטית שמעליה לא תהיה העברה היא $\alpha_c = \arcsin\left(\frac{1}{n(f)}\right) = \arcsin\left(\frac{f_0}{f}\right)$.

ג. המרחק שהאור עובר בתוך הפריזמה הוא:

$$d_1 = (l - y_i)\tan\alpha$$

לכן המרחק מהנקודה בה יוצא האור מהפריזמה ועד למסך הוא:

$$d_2 = d - d_1 = d - (l - y_i)\tan\alpha$$

מחוק סנל נוכל לקבל את הקשר בין הזוית לאנך בנקודת הפגיעה $\theta_1 = \alpha$ לזוית מהאנך של האור המועבר θ_2:

$$n\left(f\right)\sin\theta_1 = \sin\theta_2 \Rightarrow \theta_2 = \arcsin\left(\frac{f}{f_0}\sin\alpha\right)$$

הזוית בין הכיוון ההתחלתי של קרן האור (מקביל לרצפה) ובין הכיוון הסופי היא $\theta = \theta_2 - \theta_1$. ע"י זוית זו נוכל להביע את גובה הפגיעה במסך, y_f:

$$y_f = y_i - d_2\tan\theta = y_i - \left(d - \left(l - y_i\right)\tan\alpha\right)\tan\left(\theta_2 - \theta_1\right) = y_i - \left(d - \left(l - y_i\right)\tan\alpha\right)\tan\left(\arcsin\left(\frac{f}{f_0}\sin\alpha\right) - \alpha\right)$$

ד. אם $\alpha \ll 1$ נוכל לפתח:

$$\sin\alpha \approx \alpha$$

$$\arcsin\left(\frac{f}{f_0}\sin\alpha\right) \approx \frac{f}{f_0}\sin\alpha \approx \frac{f}{f_0}\alpha$$

$$\tan\left(\arcsin\left(\frac{f}{f_0}\sin\alpha\right) - \alpha\right) \approx \alpha\left(\frac{f}{f_0} - 1\right)$$

ולקבל:

$$y_f \approx y_i - \left(d - \left(l - y_i\right)\alpha\right)\alpha\left(\frac{f}{f_0} - 1\right) \approx y_i - d\alpha\left(\frac{f}{f_0} - 1\right)$$

כלומר, ככל שהתדר של האור גדול יותר (ואורך הגל קטן יותר) כך האור יפגע נמוך יותר על המסך.

ה. תחום התדירויות (לפי סעיף א) הוא $4 - 8\cdot 10^{14}Hz$ האור בתדירות הכי גבוהה (סגול) יפגע הכי נמוך על המסך, עבורו:

$$y_f = y_i - d\alpha\left(\frac{f}{f_0} - 1\right) = 9cm - 10cm\cdot 0.1\cdot\left(\frac{8}{3} - 1\right) = 7.33cm$$

האור בתדירות הכי נמוכה (אדום) יפגע הכי גבוהה על המסך, עבורו:

$$y_f = y_i - d\alpha\left(\frac{f}{f_0} - 1\right) = 9cm - 10cm \cdot 0.1 \cdot \left(\frac{4}{3} - 1\right) = 8.67cm$$

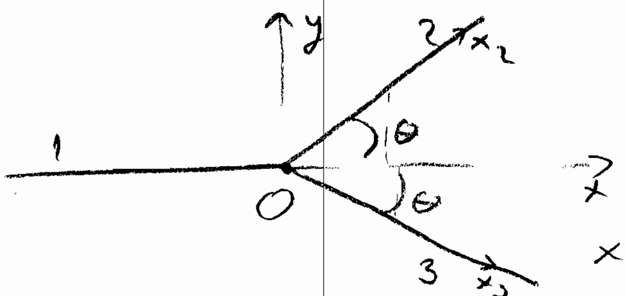
לכן, גובהו של כתם האור שיתקבל:

$$8.67cm - 7.33cm = 1.33cm$$

ו. התדר של אור כתום הינו $f = \frac{3\cdot 10^8}{600\cdot 10^{-9}} = 5\cdot 10^{14}Hz$ ולכן הא ייפגע בגובה $y_f = 9cm - 10cm \cdot 0.1 \cdot \left(\frac{5}{3} - 1\right) = 8.33cm$.

התדר של אור ירוק הינו $f = \frac{3\cdot 10^8}{500\cdot 10^{-9}} = 6\cdot 10^{14}Hz$ ולכן הא ייפגע בגובה $y_f = 9cm - 10cm \cdot 0.1 \cdot \left(\frac{6}{3} - 1\right) = 8cm$.

e_63_1_015



בשיווי המשקל המתיחויות
בנק' O שוות ⇐

$$x: \; T_1 = T_2\cos\theta + T_3\cos\theta$$

$$y: \; T_1\sin\theta = T_2\sin\theta$$

$$\Rightarrow T_2 = T_3 = \frac{T_1}{2\cos\theta}$$

נסמן ב x_2, x_3 את המרחקים על המיתרים 2,3 מנק' O.

הגלים במיתרים הם:

$$\psi_1(x,t) = A_1 e^{i(\omega t - k x)} + B_1 e^{i(\omega t + k_1 x)}$$

$$\psi_2(x_2,t) = A_2 e^{i(\omega t - k_2 x_2)}$$

$$\psi_3(x_3,t) = A_3 e^{i(\omega t - k_3 x_3)}$$

$$k_2 = \frac{\omega}{v_2} = \frac{\omega}{\sqrt{T_2/\rho}} = k_3$$

$$k_2 = \frac{\omega}{\sqrt{T_2/\rho}} = \frac{\omega}{\sqrt{\frac{T_1}{2\cos\theta\,\rho}}} = k_1\sqrt{2\cos\theta}$$

תנאי השפה:
1) רציפות

$$\psi_1(x=0,t) = \psi_2(x_2=0,t) = \psi_3(x_3=0,t)$$

$$A_1 + B_1 = A_2 = A_3$$

2) סכום הכוחות האנכיים הוא אפס.

$$-T_1 \left.\frac{\partial \psi_1}{\partial x}\right|_{x=0} + T_2 \left.\frac{\partial \psi_2}{\partial x_2}\right|_{x_2=0} + T_3 \left.\frac{\partial \psi_3}{\partial x_3}\right|_{x_3=0} = 0$$

$$-T_1(-k_1 A_1 + k_1 B_1) - T_2 A_2 k_2 - T_3 A_3 k_3 = 0$$

$$T_1 k_1 (A_1 - B_1) \underset{\substack{k_2 = k_3 \\ T_2 = T_3}}{=} T_2 k_2 (A_2 + A_3) \underset{A_2 = A_3}{=} 2 T_2 k_2 A_2$$

$$A_1 - B_1 = \frac{2 T_2 k_2 A_2}{T_1 k_1} = \frac{2\cancel{T_1}}{2\cos\theta}\,\frac{\cancel{k_1}\sqrt{2\cos\theta}}{\cancel{T_1}\cancel{k_1}}\,A_2 = \frac{2A_2}{\sqrt{2\cos\theta}}$$

$$\Rightarrow 2A_1 = A_2\left(1 + \sqrt{\frac{2}{\cos\theta}}\right)$$

$$T = \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_1} = \frac{2}{1 + \sqrt{\frac{2}{\cos\theta}}} = \frac{2\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{2} + \sqrt{\cos\theta}}$$

$$B_1 = A_2 - A_1$$

$$R = \frac{B_1}{A_1} = \frac{A_2 - A_1}{A_1} = T - 1 = \frac{2\sqrt{\cos\theta}}{\sqrt{2} + \sqrt{\cos\theta}} - 1 =$$

$$R = \frac{\sqrt{\cos\theta} - \sqrt{2}}{\sqrt{\cos\theta} + \sqrt{2}}$$

* עבור $\theta = 0$:

$$T = \frac{2}{1+\sqrt{2}} \qquad R = \frac{1-\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}$$

שני המיתרים מקבילים ושקולים למיתר אחד שמתיחותו T_1 והצפיפות 2ρ.

* עבור $\theta = \pi/2$: $T_2 = T_3 \to \infty$, $T = 0$, $R = -1$

⇐ הנק' O מאולצת להשאר במישור $y-x$, והמיתר מתנהג כמיתר קשור בקצה אחד.

* $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$

עבור $\theta = 0$, A_2, A_3 מקסימליים

* אילו התנודות היו בכיוון z, אז במיתרים 2,3 היו גם גלים רוחביים וגם גלים אורכיים. כל אחד מהגלים היה נע במהירות פאזה שונה, כיוון שבכיווני המתיחות היו שונים.

e_63_1_013

א. הגל הפוגע במיתר 1 הוא $\psi_i = A_i e^{i\omega t} e^{-ik_1 x}$

הגל העובר במיתר 2 הוא $\psi_t = A_t e^{i\omega t} e^{-ik_2 x}$

הגל החוזר במיתר 2 הוא $\psi_b = A_b e^{i\omega t} e^{ik_2 x}$

הגל הסופי במיתר 3 הוא $\psi_f = A_f e^{i\omega t} e^{-ik_3 x}$

תנאי שפה ב $x = 0$:

$$\psi_i = \psi_t + \psi_b \Rightarrow A_i = A_t + A_b$$

$$0 = -T \tfrac{d}{dx}\psi_i + T \tfrac{d}{dx}(\psi_t + \psi_b) \Rightarrow ik_1 A_i + ik_2(-A_t + A_b) = 0$$

תנאי שפה ב $x = a$:

$$\psi_t + \psi_b = \psi_f \Rightarrow A_t e^{-ik_2 a} + A_b e^{ik_2 a} = A_f e^{-ik_3 a}$$

$$0 = -T \tfrac{d}{dx}(\psi_t + \psi_b) + T \tfrac{d}{dx}\psi_f \Rightarrow ik_2\left(A_t e^{-ik_2 a} - A_b e^{ik_2 a}\right) - ik_3 A_f e^{-ik_3 a} = 0$$

ב. מתנאי שפה ב $x = 0$ מקבלים

$$A_t = \frac{k_2 + k_1}{2k_2} A_i$$

$$A_b = \frac{k_2 - k_1}{2k_2} A_i$$

ומהצבתם בתנאי השפה ב $x = a$:

$$A_f = \frac{k_2 - k_1}{k_2 - k_3} e^{i(k_3 + k_2)a} A_i$$

$$A_f = \frac{k_2 + k_1}{k_2 + k_3} e^{i(k_3 - k_2)a} A_i$$

השוואת הביטויים נותנת

$$\frac{(k_2 - k_1)(k_2 + k_3)}{(k_2 - k_3)(k_2 + k_1)} = e^{-2iak_2}$$

ג. אגף שמאל של הביטוי שקיבלנו הוא ממשי ולכן כדי שהשוויון יתקיים צריך לדרוש

$$\sin 2k_2 a = 0 \Rightarrow 2k_2 a = n\pi \Rightarrow \cos 2k_2 a = \pm 1$$

מהאפשרות הראשונה $(+1)$ מקבלים $k_1 = k_3$ ומכאן $\mu_1 = \mu_3$

מהאפשרות השניה (-1) מקבלים $k_2{}^2 = k_1 k_3$ ומכאן $\mu_2{}^2 = \mu_1 \mu_3$

ד. במקרה הראשון $(+1)$ אורך המיתר המרכזי הוא $k_2 a = n\pi \Rightarrow a = \dfrac{\lambda_2 n}{2}$

במקרה השני (-1) אורך המיתר המרכזי הוא $k_2 a = \left(n - \tfrac{1}{2}\right)\pi \Rightarrow a = \dfrac{\lambda_2 (2n - 1)}{4}$