

גלים עומדים במיתר

במיתר חצי חופשי, קצה אחד קשור וקצה אחד קשור לטבעת חסרת מסה שיכולה לנוע בכיוון האנכי למיתר.

(א) מהם אורכי הגל המותרים?

3 מיתרים כאלה נמצאים אחד מעל השני כאשר המתוחיות שלהם הן $T, 3T, 6T$. צפיפות המסה ליחידת נפח של המיתרים זהה ואורכם זהה

(ב) מה צריכים להיות הרדיוסים של המיתרים כדי שכל המיתרים ייצרו את אותם הצלילים?

(ג) התדירות ה-3 הכי נמוכה במיתרים היא 3ω , מהן כל התדירויות המותרות?

פתרון

(א)

משוואת הגלים במיתר $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, מהצבת פתרון של גל עומד במשוואה $y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi)$ נקבל:

$$-\omega^2 \rho A(x) = T \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}$$

שפתרונה:

$$A(x) = A \cos(Kx + \tilde{\varphi})$$

כאשר $K = \sqrt{\frac{\rho}{T}} \omega$ ו- $\tilde{\varphi}$ קבועים.

כלומר הפתרון שקיבלנו למשוואת הגלים הינו:

$$y(x, t) = A \cos(Kx + \tilde{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi)$$

תנאי השפה שלנו הן מיתר שקשור בצד אחד $y(x=0, t) = 0$ וחופשי בצד שני $\left. \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} \right|_{x=L} = 0$ תנאים אלו צריכים להתקיים לכל t ולכן:

$$A \cos(\tilde{\varphi}) = 0$$

$$-AK \sin(KL + \tilde{\varphi}) = 0$$

הפתרונות שלא טריויאליים, עם $A \neq 0$ הם:

$$\tilde{\varphi} = \pm \frac{\pi}{2} \Rightarrow AK \cos(KL) = 0 \Rightarrow KL = \pi \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

הערה: יש פתרון נוסף עם $K = 0$ אבל הוא פתרון קבוע שלא מעניין אותנו.
 כלומר, מספרי הגל המותרים הם $K_n = \frac{\pi}{L} \left(\frac{1}{2} + n \right)$.
 הצליל שהמיתר מייצר קשור לתדר שבו מתנדנד המיתר:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{T}{\rho}} K_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{1}{2L} \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

בכדי שתדרים אלו יהיו שווים בשלושת המיתרים נדרוש:

$$\sqrt{\frac{T}{\rho_1}} \frac{1}{2L} \left(\frac{1}{2} + n \right) = \sqrt{\frac{3T}{\rho_2}} \frac{1}{2L} \left(\frac{1}{2} + n \right) = \sqrt{\frac{6T}{\rho_2}} \frac{1}{2L} \left(\frac{1}{2} + n \right) \Rightarrow$$

$$\frac{1}{\rho_1} = \frac{3}{\rho_2} = \frac{6}{\rho_2}$$

כיוון שצפיפות המסה ליחידת נפח שנסמן μ זהה וצפיפות המסה ליחידת אורך מקיימת
 $\rho = \pi R^2 \mu$ נקבל כי:

$$\frac{1}{R_1^2} = \frac{3}{R_2^2} = \frac{6}{R_3^2}$$

כלומר, הרדיוסים צריכים לקיים את הקשר:

$$R_2 = \sqrt{3} R_1$$

$$R_3 = \sqrt{6} R_1$$

בכדי שהמיתרים יפיקו את אותם צלילים.
 ג. התדירות ה-3 נמוכה מתקבלת עבור $n = 2$:

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{5}{4L}$$

לכן:

$$\sqrt{\frac{T}{\rho} \frac{5}{4L}} = \omega_3 \Rightarrow \sqrt{\frac{T}{\rho} \frac{1}{2L}} = \frac{2}{5} \omega_3$$

כל התדירויות המותרות הן:

$$f_n = \sqrt{\frac{T}{\rho} \frac{1}{2L}} \left(\frac{1}{2} + n \right) = \frac{2}{5} \omega_3 \left(\frac{1}{2} + n \right)$$

מיתרים וגלי קול

- א. שני מיתרים המוחזקים בשתי קצותיהם נמצאים בסמיכות אחד לשני. כאשר מרעידים את המיתר הראשון (אורכו 40 ס"מ) ניתן לשמוע קול. מהם אורכי הגל הטבעיים במיתר? כתוב נוסחה עבור המוד n .
- ב. מתיחות שני המיתרים 10 ניוטון. הרדיוס 10mm והצפיפות 0.5 גרם לס"מ מעוקב. איזה תדרים משמיע המיתר?
- ג. אם מהירות הקול באויר היא 340 מטר לשנייה, איזה אורכי גל יגיעו לאוזנינו?
- ד. כתוצאה מהרעידות במיתר הראשון, גם במיתר השני מתפתחות רעידות. אורכו של המיתר השני 30 ס"מ. אילו תדירויות של המיתר הראשון יעוררו בהצלחה רעידות גם במיתר השני?
- ה. אילו תנאים נדרשים בכדי שהמיתר השני לא יעורר?

פתרון

- א. מספרי הגל הטבעיים במיתר המוחזק בשתי קצותיו הם:

$$K_n = \frac{\pi}{L}n$$

כאשר n מספר שלם.
ולכן אורכי הגל הטבעיים:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{K_n} = \frac{2L}{n}$$

נציב מספרים ונקבל את הנוסחה לאורך הגל של המוד n :

$$\lambda_n = \frac{0.8}{n} \text{ m}$$

ב. הגלים במיתר מקיימים את יחס הדיספרסיה:

$$\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}}K$$

כאשר T המתוחות במיתר ו ρ צפיפות המסה ליחידת אורך. לנו נתונה צפיפות המסה ליח' נפח, $0.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$ ורדיוס המיתר $R = 10\text{mm}$. מכאן שטח החתך של המיתר $S = \pi R^2$ ולכן הצפיפות ליח' אורך:

$$\rho = \pi R^2 \cdot 0.5 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3} = \pi 10^2 \cdot 10^{-6} \text{m}^2 \cdot 0.5 \frac{10^{-3} \text{kg}}{10^{-6} \text{m}^3} \approx 0.157 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

לכן התדירויות יהיו:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho} \frac{K_n}{2\pi}} = \sqrt{\frac{10N}{0.157 \frac{kg}{m}} \frac{1}{\lambda_n}} = \sqrt{\frac{10N}{0.157 \frac{kg}{m}} \frac{1}{0.8m}} n \approx 9.98n \text{ Hz}$$

ג. התדירויות שיגיעו לאוזנינו הן התדירויות שמפיק המיתר, את אורכי הגל המתאימים נמצא לפי הגדרת מהירות הקול, שהיא מהירות הפאזה של גלי קול באויר $v_s = \frac{\omega}{K_s}$
 $\lambda_s = \frac{v_s}{f} = \frac{\omega \lambda_s}{2\pi} = f \lambda_s$ ובמקרה שלנו:

$$\lambda_s = \frac{340}{9.98n} m \approx \frac{34}{n} m$$

ד. המתוחות והצפיפות ליח' אורך במיתרים זהה. לכן התדירויות הטבעיות במיתר השני יהיו:

$$f_{2n} = \sqrt{\frac{T}{\rho} \frac{1}{2L_2}} n = \sqrt{\frac{10N}{0.157 \frac{kg}{m}} \frac{1}{2 \cdot 0.3m}} n \approx 13.3n \text{ Hz}$$

בכדי שתנודות במיתר הראשון יעוררו תנודות במיתר השני תדירות התנודות צריכה להתאים לתדירות טבעית כלשהי בשני המיתרים. כלומר שיהיו i, j שלמים עבורם:

$$13.3j = 9.98i \Rightarrow \frac{j}{i} = \frac{9.98}{13.3} \approx 0.75 = \frac{3}{4}$$

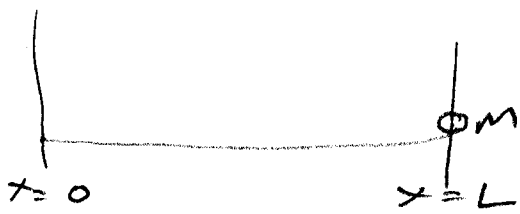
כלומר הדבר מתקיים עבור $i = 4, j = 3$ ונוכל גם להכפיל את i ו j במספר שלם כלשהו ולקבל פתרונות נוספים. כלומר, בכדי שהתנודות במיתר הראשון יעוררו תנודות במיתר השני על התנודות במיתר הראשון להיות בתדר

$$f = 9.98 \cdot 4 \cdot n \text{ Hz} = 39.92n \text{ Hz}$$

ה. בכדי שהמיתר השני לא יעורר על התדירויות הטבעיות שלו להיות בתדרים שונים מהתדירויות הטבעיות של המספר הראשון, כלומר **שלא** יהיו קיימים i, j כך ש (T', ρ', f', L') פרמטרים של המיתר השני שאנו מחפשים):

$$f'_j = \sqrt{\frac{T'}{\rho'} \frac{1}{2L'}} j = 9.98i$$

כלומר שיתקיים כי $\frac{i}{j} = \sqrt{\frac{T'}{\rho'} \frac{1}{2L' \cdot 9.98}}$ יהיה מספר לא רציונאלי. ניתן לקבל זאת ע"י שינוי המתוחות, הצפיפות ליח' אורך או האורך של המיתר השני.



$$\psi|_{x=0} = 0 \Rightarrow B = 0 \quad \text{נא' לפרט: } \underline{x=0}$$

$$m \left. \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \right|_{x=L} = -T \left. \frac{\partial \psi}{\partial x} \right|_{x=L} \Rightarrow -m\omega^2 A \sin kL = -T k A \cos kL \quad \underline{x=L}$$

$$\omega^2 = v^2 k^2 = \frac{T}{\mu} k^2 \quad \text{רשימויות:}$$

$$\Rightarrow m \frac{T}{\mu} k^2 \sin kL = T k \cos kL$$

הפתרון \$k=0\$ הוא פתרון טריווילי \$\psi=0\$ אך לא נרצה אותו.
אכן נרצה.

$$\Rightarrow \frac{m}{\mu} k = \cot kL$$

אז המשוואה היא נ"מ להעברת \$k_n\$ (נחשית, ...)

$$\cot kL = 0 \Rightarrow k_n = \frac{(n + \frac{1}{2})\pi}{L} \quad \underline{m \rightarrow 0}$$

$$\tan kL = 0 \Rightarrow k_n = \frac{n\pi}{L} \quad \underline{m \rightarrow \infty}$$