מטוטלות מצומדות

במערכת הבאה תלויים צמד חוטים באורך מטר אחד ובקצותיהם שני כדורים בעלי מסה של 25 גרם. שני הכדורים מחוברים בניהם על ידי קפיץ בעל קבוע קפיץ $k = 23N/m$. בזמן $t = 0$ הכדור השמאלי מוסט בזווית של $0.1rad$.

א) האם ניתן להשמש בקרוב של זוויות קטנות בבעיה זו?

ב) מצא/י את התדירויות העצמיות ואת אופני התנודה של המערכת.

ג) מה מציינת כל תדירות עצמית?

ד) מצא/י את הזמן בו המסה הימנית תהיה מוסטת באמפליטודה המכסימלית. (אתם יכולים להשתמש בפונקציה $NSolve$ של $WolframMathematica$ כדי לקבל פתרון נומרי (הערה: ניתן להניח כי הקפיץ תמיד אופקי).

פתרון

א) משימור אנרגיה אנחנו יודעים שאם המטוטלת השמאלית מתחילה את התנועה בהסטה של זוית $0.1rad$ וללא מהירות הזוית שלה לעולם לא תעבור את הזוית ההתחלתית וכנ"ל בשביל המטוטלת השנייה (כי המטוטלות זהות והאנרגיה הכי גבוהה של המטוטלת השנייה יכולה להתקבל רק ממעבר אנרגיה מהמטוטלת הראשונה). $sin\left(0.1\right) \approx 0.0998$ ולכן הקירוב לסדר ראשון בטור טיילור $\sin\left(0.1\right) \approx 0.1$ נותן שגיאה של 0.2%, זוהי שגיאה קטנה מאוד והיא גם השגיאה המקסימאלית שנקבל לאורך תנועת המטוטלות (זו הזווית המקסימאלית שהמטוטלת מגיעה אליה) לכן הקירוב של סדר ראשון בטור טיילור מספיק טוב כאן.

ב) נבחר ראשית צירים עבור כל מטוטלת בנקודת החיבור שלה לתקרה. מיקום המטוטלת השמאלית יסומן ב x_1, y_1 והזווית שלה מהאנך θ_1. מיקום המטוטלת הימנית יסומן ב x_2, y_2 והזווית שלה מהאנך θ_2.

ממשוואת כוחות בכל ציר (בהנחה שהקפיץ תמיד אפקי) נקבל:

$$m\ddot{x}_1 = -T\sin\theta_1 + k\left(x_2 - x_1\right) \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_1 = T\cos\theta_1 - mg \tag{2}$$

$$m\ddot{x}_2 = -T\sin\theta_2 - k\left(x_2 - x_1\right) \tag{3}$$

$$m\ddot{y}_2 = T\cos\theta_2 - mg \tag{4}$$

נביע את x_1, y_1, x_2, y_2 בעזרת θ_1, θ_2 , נסמן את אורך החוטים ב L:

$$x_i = L\sin\theta_i \Rightarrow \dot{x}_i = L\cos\theta_i\dot{\theta}_i \Rightarrow \ddot{x}_i = -L\sin\theta_i\left(\dot{\theta}_i\right)^2 + L\cos\theta_i\ddot{\theta}_i$$

$$y_i = -L\cos\theta_i \Rightarrow \dot{y}_i = L\sin\theta_i\dot{\theta}_i \Rightarrow \ddot{y}_i = L\cos\theta_i\left(\dot{\theta}_i\right)^2 + L\sin\theta_i\ddot{\theta}_i$$

כאשר $i = 1, 2$.
נכפיל את משוואה 1 ב $\cos\theta_1$ ואת 2 ב $\sin\theta_1$ ונחבר:

$$m\left(-L\sin\theta_1\cos\theta_1\left(\dot{\theta}_1\right)^2 + L\cos^2\theta_1\ddot{\theta}_1 + L\cos\theta_1\sin\theta_1\left(\dot{\theta}_1\right)^2 + L\sin^2\theta_1\ddot{\theta}_1\right) =$$

$$\cos\theta_1 kL\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) - mg\sin\theta_1 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta}_1 = \cos\theta_1\frac{k}{m}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) - \frac{g}{l}\sin\theta_1$$

בדומה נכפיל את משוואה 3 ב $\cos\theta_2$ ואת 3 ב $\sin\theta_2$ ונחבר:

$$m\left(-L\sin\theta_2\cos\theta_2\left(\dot{\theta}_2\right)^2 + L\cos^2\theta_2\ddot{\theta}_2 + L\cos\theta_2\sin\theta_2\left(\dot{\theta}_2\right)^2 + L\sin^2\theta_2\ddot{\theta}_2\right) =$$

$$-\cos\theta_2 kL\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) - mg\sin\theta_2 \Rightarrow$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\cos\theta_2\frac{k}{m}\left(\sin\theta_2 - \sin\theta_1\right) - \frac{g}{l}\sin\theta_2$$

נקרב בטור טיילור לסדר ראשון: $\sin\theta_i \approx \theta_i$ ו $\cos\theta_i \approx 1$ ונקבל:

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{k}{m}\left(\theta_2 - \theta_1\right) - \frac{g}{l}\theta_1$$

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{k}{m}\left(\theta_2 - \theta_1\right) - \frac{g}{l}\theta_2$$

ובצורה מטרציונית:

$$\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\frac{k}{m}+\frac{g}{l} & -\frac{k}{m}\\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}+\frac{g}{l}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה:

$$\left(\frac{k}{m}+\frac{g}{l}-\omega^2\right)^2-\left(\frac{k}{m}\right)^2=0\Rightarrow\frac{k}{m}+\frac{g}{l}-\omega^2=\pm\frac{k}{m}\Rightarrow$$

$$\omega_1=\sqrt{\frac{g}{l}}\approx 3.13\ ,\ \omega_2=\sqrt{2\frac{k}{m}+\frac{g}{l}}\approx 43$$

נמצא את הו"ע לפי:

$$\begin{pmatrix}\frac{k}{m}+\frac{g}{l}-\omega_i^2 & -\frac{k}{m}\\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}+\frac{g}{l}-\omega_i^2\end{pmatrix}\vec{v}_i=0$$

עבור ω_1:

$$\begin{pmatrix}\frac{k}{m} & -\frac{k}{m}\\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m}\end{pmatrix}\vec{v}_1=0\Rightarrow\vec{v}_1=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

עבור ω_2:

$$\begin{pmatrix}-\frac{k}{m} & -\frac{k}{m}\\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m}\end{pmatrix}\vec{v}_2=0\Rightarrow\vec{v}_2=\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}$$

מצאנו את התדרים העצמיים ואופני התנודה של המערכת. הפתרון הכללי יהיה:

$$\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}=A_1\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}\cos\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)+A_2\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}\cos\left(\omega_2 t+\varphi_2\right)$$

נציב תנאי התחלה: $\theta_1\left(t=0\right)=0.1rad=\theta_0$
ו $\dot{\theta}_1\left(t=0\right)=\dot{\theta}_2\left(t=0\right)=\theta_2\left(t=0\right)=0$:

$$\theta_0=A_1\cos\left(\varphi_1\right)+A_2\cos\left(\varphi_2\right)\qquad(5)$$

$$0 = A_1 \cos(\varphi_1) - A_2 \cos(\varphi_2) \tag{6}$$

$$0 = -A_1 \omega_1 \sin(\varphi_1) - A_2 \omega_2 \sin(\varphi_2) \tag{7}$$

$$0 = -A_1 \omega_1 \sin(\varphi_1) + A_2 \omega_2 \sin(\varphi_2) \tag{8}$$

מחיבור וחיסור משוואות 8,7 נקבל:

$$A_1 \omega_1 \sin(\varphi_1) = 0 \Rightarrow \varphi_1 = 0, \pi$$

$$A_2 \omega_2 \sin(\varphi_2) = 0 \Rightarrow \varphi_2 = 0, \pi$$

מהצבה במשוואות 6,5 וחיבור וחיסור שלהן נקבל (עבור $\varphi = 0$, אם נציב $\varphi = \pi$ נקבל אותן תוצאות עם מינוס והפתרון לבעיה ישאר זהה):

$$A_1 = \frac{\theta_0}{2}$$

$$A_2 = \frac{\theta_0}{2}$$

קיבלנו את הפתרון לבעיה:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = \frac{\theta_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cos(\omega_1 t) + \frac{\theta_0}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cos(\omega_2 t)$$

ג)

התדירות העצמית ω_1 מתאימה למוד העצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, כלומר לתנועת המטוטלות ביחד, כאשר $\theta_1 = \theta_2$. זוהי תנועת מרכז המסה. במקרה זה הקפיץ נשאר רפוי כל הזמן והתדירות היא כמו התדירות של מטוטלת בודדת $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{l}}$.

התדירות העצמית ω_2 מתאימה למוד העצמי $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, כלומר לתנועה בזויות מנוגדות, כאשר $\theta_1 = -\theta_2$. זוהי התנועה היחסית. במקרה זה הקפיץ נמתח ומתרפה בכל תנועה ולכן התדירות כוללת את תדירות המטוטלת ואת תדירות הקפיץ (פעמיים $\frac{k}{m}$ כי שתי המסות זזות זו אל זו ולכן הקפיץ נמתח פי 2 משהיה נמתח בתנועת מסה אחת)

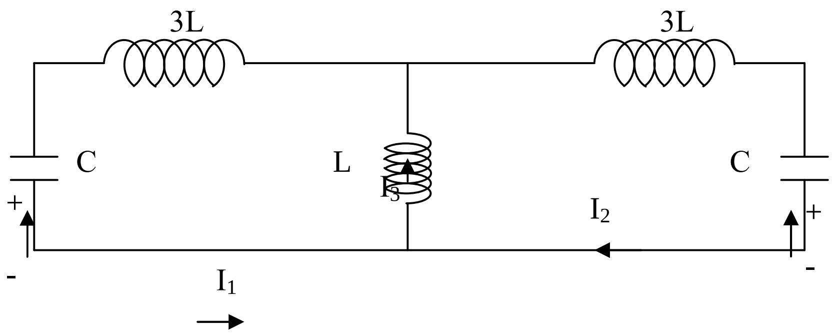
ד)

אנחנו יודעים מהי הזוית של המטוטלת הימנית כפונקצייה של הזמן:

$$\theta_2 = \frac{\theta_0}{2}\left(\cos\left(\omega_1 t\right) - \cos\left(\omega_2 t\right)\right)$$

פתרון נומרי ייתן לנו כמה נקודות מקסימום עבור θ_2 , למשל $t \approx 1.97$ עם אמפליטודה מקסימאלית $\theta_2 \approx \theta_0 = 0.1rad$ (הערה: משימור אנרגיה אנחנו יודעים שהאמפליטודה המקסימאלית לא יכולה להיות יותר גדולה מθ_0).

4.



א) נגדיר לה"כ את המטענים על הקבלים. בתצורה הזו מתקבל כי הקבלים נטענים ולכן $\dot{q} = I$. I_3 נבחר שרירותית.

חוק הצומת נותן $I_1 + I_2 = I_3$.

נרשום את המתחים

לופ שמאל

לופ ימין $$\frac{q_1}{C} + 3L\dot{I}_1 + L\dot{I}_3 = 0 \Rightarrow \frac{q_1}{C} + 3L\dot{I}_1 + L\left(\dot{I}_2 + \dot{I}_1\right) = 0$$

$$\frac{q_2}{C} + 3L\dot{I}_2 + L\dot{I}_3 = 0 \Rightarrow \frac{q_2}{C} + 3L\dot{I}_2 + L\left(\dot{I}_2 + \dot{I}_1\right) = 0$$

נגזור את המשוואות

$$\frac{I_1}{C} + 3L\ddot{I}_1 + L\left(\ddot{I}_2 + \ddot{I}_1\right) = 0 \Rightarrow \frac{I_1}{C} = -4L\ddot{I}_1 - L\ddot{I}_2$$

$$\frac{I_2}{C} + 3L\ddot{I}_2 + L\left(\ddot{I}_2 + \ddot{I}_1\right) = 0 \Rightarrow \frac{I_2}{C} = -L\ddot{I}_1 - 4L\ddot{I}_2$$

נכפיל את המשוואה העליונה ב-4- ונחבר את המשוואות: $15L\ddot{I}_1 = -4\frac{I_1}{C} + \frac{I_2}{C}$

נכפיל את המשוואה התחתונה ב-4- ונחבר את המשוואות: $15L\ddot{I}_2 = \frac{I_1}{C} - 4\frac{I_2}{C}$

נרשום את המשוואות הקנוניות:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{I}_1+4\frac{I_1}{15LC}-\frac{I_2}{15LC}=0\\ \ddot{I}_2-\frac{I_1}{15LC}+4\frac{I_2}{15LC}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow \ddot{\vec{I}}=\hat{A}\vec{I}$$

ב) ובצורה המטריצית:

$$\begin{pmatrix}\ddot{I}_1\\ \ddot{I}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{4}{15LC} & \frac{1}{15LC}\\ \frac{1}{15LC} & -\frac{4}{15LC}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_1\\ I_2\end{pmatrix}$$

ע"מ למצוא את הע"ע נאפס את הדטרמיננטה $\left|\hat{I}s^2-\hat{A}\right|$

$$\begin{vmatrix}s^2+\frac{4}{15LC} & -\frac{1}{15LC}\\ -\frac{1}{15LC} & s^2+\frac{4}{15LC}\end{vmatrix}=0\Rightarrow\left(s^2+\frac{4}{15LC}\right)^2-\left(\frac{1}{15LC}\right)^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}s^2+\frac{4}{15LC}=\frac{1}{15LC}\\ s^2+\frac{4}{15LC}=-\frac{1}{15LC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s_1^2=-\frac{1}{5LC}\\ s_1^2=-\frac{1}{3LC}\end{cases}$$

התדירויות העצמיות, אם כן $\omega_2^2=\frac{1}{3LC}$, $\omega_1^2=\frac{1}{5LC}$.

נמצא את אופני התנודה:

$$\left(\hat{I}s_1^2-\hat{A}\right)\vec{V}_1=0\Rightarrow\begin{pmatrix}\frac{1}{15LC} & -\frac{1}{15LC}\\ -\frac{1}{15LC} & \frac{1}{15LC}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}V_{11}\\ V_{12}\end{pmatrix}=0\Rightarrow\frac{1}{15LC}V_{11}-\frac{1}{15LC}V_{12}=0$$

נגדיר את $V_{11}=1$ ומכאן $\vec{V}_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$.באופן דומה $\vec{V}_2=\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$.

נמצא את קבועי התנועה. נרשום את הפתרון הכללי:

$$I(t)=\vec{V}_1A_1\cos\left(\omega_1t+\varphi_1\right)+\vec{V}_2A_2\cos\left(\omega_2t+\varphi_2\right)$$

ע"מ שניתן יהיה להשתמש בתנאי ההתחלה של המתח צריך לעשות

אינטגרציה על הפתרון הכללי.

$$V(t)=\frac{q(t)}{C}=\int\frac{I(t)}{C}dt=\vec{V}_1\frac{A_1}{C\omega_1}\sin\left(\omega_1 t+\varphi_1\right)+\vec{V}_2\frac{A_2}{C\omega_2}\sin\left(\omega_2 t+\varphi_2\right)$$

נציב ת"ה:

$$\begin{aligned}
V_{01}&=\frac{A_1}{C\omega_1}\sin\varphi_1+\frac{A_2}{C\omega_2}\sin\varphi_2 &&\leftarrow V_{C_1}(0)=V_{01} &&(1)\\
V_{02}&=\frac{A_1}{C\omega_1}\sin\varphi_1-\frac{A_2}{C\omega_2}\sin\varphi_2 &&\leftarrow V_{C_2}(0)=V_{02} &&(2)\\
0&=A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2 &&\leftarrow I_1(0)=0 &&(3)\\
0&=A_1\cos\varphi_1-A_2\cos\varphi_2 &&\leftarrow I_2(0)=0 &&(4)
\end{aligned}$$

מתוך 1+2 ו-3+4 נקבל:

$$\left.\begin{aligned}V_{01}+V_{02}&=\frac{2A_1}{C\omega_1}\sin\varphi_1\\ 0&=2A_1\cos\varphi_1\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\varphi_1=\frac{\pi}{2}\Rightarrow A_1=\frac{C\omega_1}{2}\left(V_{01}+V_{02}\right)}$$

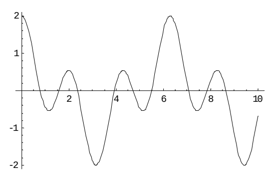
מתוך 1-2 ו-3-4 נקבל:

$$\left.\begin{aligned}V_{01}-V_{02}&=\frac{2A_2}{C\omega_2}\sin\varphi_2\\ 0&=2A_2\cos\varphi_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \boxed{\varphi_2=\frac{\pi}{2}\Rightarrow A_2=\frac{C\omega_2}{2}\left(V_{01}-V_{02}\right)}$$

ג) ע"מ לקבל פעימות ברורות צריך שהיחס $\frac{\omega_b}{\omega_{av}}$ יהיה קטן מספיק. נבדוק:

$$\frac{\omega_b}{\omega_{av}}=\frac{\sqrt{\frac{1}{3LC}}-\sqrt{\frac{1}{5LC}}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{1}{3LC}}+\sqrt{\frac{1}{5LC}}\right)}=\frac{\sqrt{\frac{2}{15}}}{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8}{15}}}=1$$ כלומר פעימות של 1:1 - לא פעימות

ברורות:



נשנה את הסליל המרכזי לערך של nL.

דבר זה ישנה את משוואות התנועה ל-

$$\frac{I_1}{C}+3L\ddot{I}_1+nL\left(\ddot{I}_2+\ddot{I}_1\right)=0\Rightarrow\frac{I_1}{C}=-\left(3+n\right)L\ddot{I}_1-nL\ddot{I}_2$$
$$\frac{I_2}{C}+3L\ddot{I}_2+nL\left(\ddot{I}_2+\ddot{I}_1\right)=0\Rightarrow\frac{I_2}{C}=-nL\ddot{I}_1-\left(3+n\right)L\ddot{I}_2$$

המשוואות הקנוניות שיתקבלו:

$$\left.\begin{aligned}\ddot{I}_1+\frac{n+3}{3\left(3+2n\right)}\frac{I_1}{LC}-\frac{n}{3\left(3+2n\right)}\frac{I_2}{LC}=0\\ \ddot{I}_2-\frac{n}{3\left(3+2n\right)}\frac{I_1}{LC}+\frac{n+3}{3\left(3+2n\right)}\frac{I_2}{LC}=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\ddot{\vec{I}}=\hat{A}\vec{I}$$

מכאן, הדטרמיננטה וע"ע:

$$\begin{vmatrix}s^2+\frac{n+3}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC} & -\frac{n}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}\\ -\frac{n}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC} & s^2+\frac{n+3}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}\end{vmatrix}=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\left(s^2+\frac{n+3}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}\right)^2-\left(\frac{n}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}\right)^2=0\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{cases}s^2+\frac{n+3}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}=\frac{n}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}\\ s^2+\frac{n+3}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}=-\frac{n}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}s_1^2=-\frac{3}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}\\ s_1^2=-\frac{2n+3}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}\end{cases}$$

התדירויות העצמיות, אם כן $\omega_2^2=\frac{2n+3}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}$, $\omega_1^2=\frac{3}{3\left(3+2n\right)}\frac{1}{LC}$.

נבדוק את יחס הפעימות.

$$\frac{1}{1000}=\frac{\omega_b}{\omega_{av}}=\frac{\sqrt{\frac{2n+3}{3(3+2n)}\frac{1}{LC}}-\sqrt{\frac{1}{(3+2n)}\frac{1}{LC}}}{\frac{1}{2}\left(\sqrt{\frac{2n+3}{3(3+2n)}\frac{1}{LC}}+\sqrt{\frac{1}{(3+2n)}\frac{1}{LC}}\right)}\Rightarrow n=0.00368$$

Solution: 3_2905
EOM:

$$
\begin{aligned}
m_o\ddot{x}_1 &= -k(x_1 - x_2)\\
m_c\ddot{x}_2 &= -k(x_2 - x_1) - k(x_2 - x_3)\\
m_o\ddot{x}_3 &= -k(x_3 - x_2)
\end{aligned}
$$

Our solution will be: $x(t) = x_0 \cos(\omega t + \varphi)$ thus after rewriting the eqatoin we find:

$$
\begin{pmatrix} \frac{k}{m_o} - \omega^2 & \frac{k}{m_o} & 0 \\ \frac{k}{m_c} & \frac{2k}{m_c} - \omega^2 & \frac{k}{m_c} \\ 0 & \frac{k}{m_o} & \frac{k}{m_o} - \omega^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 0
$$

this is an eigenvalue problem to be solved, the solutions are solved by the determinant $|\hat{A} - \omega^2 I| = 0$ which leads to:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{-k^2 m_c\omega^2 - 2k^2 m_o\omega^2 + 2km_c m_o\omega^4 + 2km_o^2\omega^4 - m_c m_o^2\omega^6}{m_c m_o^2}\\
0 &= \omega^2\left(k - m_o\omega^2\right)\left(k(m_c + 2m_o) - m_c m_o\omega^2\right)
\end{aligned}
$$

Thus we find that the natural frequencies are:

$$
\begin{aligned}
\omega_s^2 &= 0\\
\omega_{a1}^2 &= \frac{k}{m_0}\\
\omega_{a2}^2 &= \frac{k(m_c + 2m_o)}{m_c m_o}
\end{aligned}
$$

The $\omega_s^2 = 0$ is the symmetric one with the eigen vector $\vec{V}_s = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ which means that the molecule can start at any location in space and move with a constant velocity.

The $\omega_{a1}^2 = \frac{k}{m_0}$ is the asymmetric one with the eigen vector $\vec{V}_{a1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ which means that both oxygens move exactly in oppisite directions.
The $\omega_0^2 = \frac{k(m_c+2m_o)}{m_c m_o}$ is the asymmetric one with the eigen vector $\vec{V}_{a2} =$

$\begin{pmatrix} 1 \\ -2\frac{m_o}{m_c} \\ 1 \end{pmatrix}$ which means that both oxygens move exactly in same direction while the carbon moves twice as much (upto a prefactor of the mass ratio) in the opposite direction.

Plugging the numbers:$\omega_{a1} = 6.06951 \times 10^{25} \frac{rad}{sec}$; $\omega_{a2} = 1.16275 \times 10^{26} \frac{rad}{sec}$;