מצב היסוד של אטום המימן

פונקציית גל של אלקטרון באטום המימן במצב היסוד היא

$$\psi\left(\boldsymbol{r}\right)=\frac{1}{\pi^{1/2}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$$

כאשר a_0 הוא הרדיוס של בוהר.

1. בדוק את נרמול הפונקציה (שים לב שאלמנט הנפח הוא $d^3r=4\pi r^2dr$ כאשר 4π נובע מאינטגרל על זוויות).
2. מה הסיכוי של האלקטרון להיות במרחק r הגדול מרדיוס בוהר?
3. מה הסיכוי של האלקטרון להיות בתוך הגרעין, כאשר רדיוס הגרעין $6.686\cdot10^{-15}m$? (ניתן לפתח $e^{-2r/a_0}\approx1-\frac{2r}{a_0}$)
4. מהי פונקציית מצב יסוד עבור אלקטרון יחיד באטום כשמטען הגרעין הוא eZ?
5. חשב את ממוצע האנרגיה הפוטנציאלית והשווה לתוצאה המתאימה של מודל בוהר.

פתרון

נצטרך לבצע מספר פעמים אינטגרלים מהצורה $4\pi\int\left|\psi\left(\boldsymbol{r}\right)\right|^2r^2dr=\frac{4}{a_0^3}\int e^{-2r/a_0}r^2dr$.

נחשב את האינטגרל הלא מסויים פעם אחת ונוכל להשתמש בו, נשתמש באינטגרציה בחלקים פעמיים:

$$\int e^{-2r/a_0}r^2dr=-\frac{a_0}{2}e^{-2r/a_0}r^2+a_0\int e^{-2r/a_0}rdr=$$

$$-\frac{a_0}{2}e^{-2r/a_0}r^2-\frac{a_0^2}{2}e^{-2r/a_0}r+\frac{a_0^2}{2}\int e^{-2r/a_0}dr=$$

$$-\frac{a_0}{2}e^{-2r/a_0}r^2-\frac{a_0^2}{2}e^{-2r/a_0}r-\frac{a_0^3}{4}e^{-2r/a_0}=-\left(\frac{a_0}{2}r^2+\frac{a_0^2}{2}r+\frac{a_0^3}{4}\right)e^{-2r/a_0}$$

1. נרמול הפונקצייה אמור לקיים $4\pi\int_0^\infty\left|\psi\left(\boldsymbol{r}\right)\right|^2r^2dr=1$ נבדוק זאת, לפי פתרון האינטגרל שמצאנו:

$$4\pi\int_0^\infty\left|\psi\left(\boldsymbol{r}\right)\right|^2r^2dr=\frac{4}{a_0^3}\left[-\left(\frac{a_0}{2}r^2+\frac{a_0^2}{2}r+\frac{a_0^3}{4}\right)e^{-2r/a_0}\right]_0^\infty=$$

$$\frac{4}{a_0^3}\frac{a_0^3}{4}=1$$

כאשר השתמשנו בכך שב $r \to \infty$ האקספוננטים דועכים מהר יותר מr ומ r^2 ולכן הגבול הוא 0.

2. הסיכוי של אלקטרון להיות במרחק הגדול מרדיוס בוהר הוא $4\pi\int_{a_0}^{\infty}\left|\psi\left(\boldsymbol{r}\right)\right|^2 r^2dr$, נשתמש בפתרון האינטגרל ונקבל:

$$4\pi\int_{a_0}^{\infty}\left|\psi\left(\boldsymbol{r}\right)\right|^2 r^2dr=\frac{4}{a_0^3}\left[-\left(\frac{a_0}{2}r^2+\frac{a_0^2}{2}r+\frac{a_0^3}{4}\right)e^{-2r/a_0}\right]_{a_0}^{\infty}=$$

$$=2e^{-2}+2e^{-2}+e^{-2}=\frac{5}{e^2}\approx 0.677$$

3. הסיכוי של אלקטרון להיות בתוך הגרעין הינו $4\pi\int_{0}^{r_0}\left|\psi\left(\boldsymbol{r}\right)\right|^2 r^2dr$ כאשר $r_0=6.686\cdot 10^{-15}m$, נשתמש בפתרון האינטגרל ונקבל:

$$4\pi\int_{0}^{r_0}\left|\psi\left(\boldsymbol{r}\right)\right|^2 r^2dr=\frac{4}{a_0^3}\left[-\left(\frac{a_0}{2}r^2+\frac{a_0^2}{2}r+\frac{a_0^3}{4}\right)e^{-2r/a_0}\right]_{0}^{r_0}=$$

$$=1-\left(2\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^2+2\frac{r_0}{a_0}+1\right)e^{-2r_0/a_0}$$

נשתמש בפיתוח הנתון $e^{-2r/a_0}\approx 1-\frac{2r}{a_0}$ ונקבל:

$$1-2\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^2-2\frac{r_0}{a_0}-1+4\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^3+4\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^2+2\frac{r_0}{a_0}=4\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^3+2\left(\frac{r_0}{a_0}\right)^2$$

נשתמש בערך הידוע של רדיוס בוהר $a_0=5.29\cdot 10^{-11}m$ ונקבל כי $\frac{r_0}{a_0}\approx 0.126\cdot 10^{-3}$ ולכן ההסתברות של האלקטרון להיות בתוך הגרעין הינה בערך $3.18\cdot 10^{-8}$.

4. הדבר היחיד שהיה משתנה בכל הפתרון הוא שכעת האנרגיה הפוטנציאלית היא $\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}=k\frac{Ze^2}{r}$ ולכן רדיוס בוהר היה משתנה מ $a_0=\frac{\hbar^2}{ke^2\mu}$ ל $\frac{a_0}{Z}=\frac{\hbar^2}{kZe^2\mu}=a$ ולכן פונקציית הגל החדשה של מצב היסוד:

$$\psi\left(\boldsymbol{r}\right)=\frac{Z^{3/2}}{\pi^{1/2}a_0^{3/2}}e^{-Zr/a_0}$$

5. ממוצע האנרגיה הפוטנציאלית הינו:

$$\left\langle\psi\right|k\frac{e^2}{r}\left|\psi\right\rangle=\int_0^{\infty}\psi^*\left(r\right)\frac{ke^2}{r}\psi\left(r\right)4\pi r^2dr=$$

$$Z^3\frac{4ke^2}{a_0^3}\int_0^\infty e^{-Zr/a_0}\frac{1}{r}e^{-Zr/a_0}r^2dr = Z^3\frac{4ke^2}{a_0^3}\int_0^\infty e^{-2Zr/a_0}rdr =$$

$$Z^3\frac{4ke^2}{a_0^3}\left(\left[-\frac{a_0}{2Z}e^{-2Zr/a_0}r\right]_0^\infty + \frac{a_0}{2Z}\int_0^\infty e^{-2Zr/a_0}dr\right) =$$

$$-Z^3\frac{4ke^2}{a_0^3}\frac{a_0^2}{4Z^2}\left[e^{-2r/a_0}\right]_0^\infty = Z^3\frac{4ke^2}{a_0^3}\frac{a_0^2}{4Z^2} = \frac{kZe^2}{a_0}$$

כמו במודל בוהר

אי וודאות במצב היסוד של אטום המימן

נתונה פונקציית הגל של אלקטרון במצב היסוד של אטום המימן:

$$\psi\left(\boldsymbol{r}\right)=\frac{1}{\pi^{1/2}a_0^{3/2}}e^{-r/a_0}$$

הראה כי עבור פונקציית גל זו מתקיים עקרון אי הוודאות, בין אי הודאות במקום ובתנע ע"פ השלבים הבאים:

א. נמק ע"י שימוש בסימטריה של הבעיה מדוע ערכי התצפית של מיקום האלקטרון בצירים השונים מתאפסים, $\langle x\rangle=\langle y\rangle=\langle z\rangle=0$ וכן ערכי התצפית של התנע בכיוונים השונים מתאפסים $\langle p_x\rangle=\langle p_y\rangle=\langle p_z\rangle=0$.

ב. חשב את ממוצע המרחק בריבוע $\left\langle r^2\right\rangle$.

ג. השתמש בהגדרת אופרטור התנע בריבוע בהצגת המקום (שאנחנו מכירים ממשוואת שרדינגר) $\hat{p}^2=-\hbar^2\nabla^2$ לחישוב ממוצע ריבוע התנע של האלקטרון $\left\langle p^2\right\rangle$. רמז: השתמש ב$\nabla^2$ בקואורדינאטות כדוריות (ניתן למצוא בויקיפדיה).

ד. נמק מדוע $\left\langle x^2\right\rangle=\left\langle y^2\right\rangle=\left\langle z^2\right\rangle=\frac{1}{3}\left\langle r^2\right\rangle$ ו $\left\langle p_x^2\right\rangle=\left\langle p_y^2\right\rangle=\left\langle p_z^2\right\rangle=\frac{1}{3}\left\langle p^2\right\rangle$

ה. על פי הסעיפים הקודמים חשב את $\Delta x,\Delta y,\Delta z$ ו $\Delta p_x,\Delta p_y\Delta p_z$ והראה כי $\Delta x\Delta p_x=\Delta y\Delta p_y=\Delta z\Delta p_z\geq\frac{\hbar}{2}$.

פתרון

א. ההסתברות של אלקטרון להיות במיקום כלשהו תלויה רק במרחקו מהגרעין, לכן ההסתברות שהאלקטרון יהיה במיקום x,y,z זהה להסתברות שהוא יהיה ב$-x,-y,-z$. לכן, למשל, חישוב הממוצע עבור x יכלול עבור כל איבר עם $x=a$ איבר בהסתברות זהה עם $x=-a$ ובסך הכל הממוצע יתאפס. אותו דבר יקרה עבור y ו z. בצורה דומה עבור כל נקודה בה יהיה תנע בכיוון כלשהו יש נקודה בצידו השני של הגרעין עם הסתברות זהה לתנע בכיוון ההפוך (זאת כיוון שהמצב סימטרי לסיבוב) ולכן בסך הכל התנע הממוצע בכל כיוון יתאפס.

ב.

$$\left\langle r^2\right\rangle=\langle\psi|\,r^2\,|\psi\rangle=4\pi\int_0^\infty r^2\,|\psi\left(r\right)|^2\,r^2dr=\frac{4}{a_0^3}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}r^4dr=$$

$$\frac{4}{a_0^3}\left(\left[-\frac{a_0}{2}e^{-\frac{2r}{a_0}}r^4\right]_0^\infty+\frac{4a_0}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}r^3dr\right)=\frac{8}{a_0^2}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}r^3dr=$$

$$\frac{8}{a_0^2}\left(\left[-\frac{a_0}{2}e^{-\frac{2r}{a_0}}r^3\right]_0^\infty+\frac{3a_0}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}r^2dr\right)=\frac{12}{a_0}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}r^2dr=$$

$$\frac{12}{a_0}\left(\left[-\frac{a_0}{2}e^{-\frac{2r}{a_0}}r^2\right]_0^\infty + a_0\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}rdr\right) = 12\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}rdr =$$

$$12\left(\left[-\frac{a_0}{2}re^{-\frac{2r}{a_0}}\right]_0^\infty + \frac{a_0}{2}\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}dr\right) = 6a_0\int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}}dr = 3a_0^2$$

ג. ע"י אופרטור התנע בריבוע בהצגת המקום:

$$\left\langle p^2\right\rangle = \langle\psi|\, p^2\, |\psi\rangle = 4\pi\int_0^\infty \psi^*(r)\left(-\hbar^2\nabla^2\right)\psi(r)\, r^2dr$$

נשתמש באופרטור ∇^2 בקואורדינאטות כדוריות כאשר הפונקצייה שלנו תלוייה רק ב r ולכן רק נגזרות לפי r לא מתאפסות. לכן נוכל להשתמש ב $\nabla^2\psi(r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi(r)$ ולקבל:

$$\left(-\hbar^2\nabla^2\right)\psi(r) = -\hbar^2\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\psi(r) = -\frac{\hbar^2}{\pi^{1/2}a_0^{3/2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(e^{-r/a_0}\right) =$$

$$\frac{\hbar^2}{\pi^{1/2}a_0^{3/2}}\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\frac{r^2}{a_0}\left(e^{-r/a_0}\right) = \frac{\hbar^2}{\pi^{1/2}a_0^{3/2}}\frac{1}{r^2}\left(\frac{2r}{a_0}e^{-r/a_0} - \frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/a_0}\right)$$

לכן:

$$\left\langle p^2\right\rangle = \frac{4\hbar^2}{a_0^3}\int_0^\infty e^{-r/a_0}\left(\frac{2r}{a_0}e^{-r/a_0} - \frac{r^2}{a_0^2}e^{-r/a_0}\right)dr =$$

$$\frac{4\hbar^2}{a_0^3}\left[\int_0^\infty \frac{2r}{a_0}e^{-2r/a_0}dr - \int_0^\infty \frac{r^2}{a_0^2}e^{-2r/a_0}dr\right]$$

נפתור כל אינטגרל בנפרד:

$$\int_0^\infty \frac{2r}{a_0}e^{-2r/a_0}dr = \frac{2}{a_0}\int_0^\infty re^{-2r/a_0}dr = \frac{2}{a_0}\left(\left[-\frac{a_0}{2}re^{-2r/a_0}\right]_0^\infty + \frac{a_0}{2}\int_0^\infty e^{-2r/a_0}dr\right) =$$

$$\int_0^\infty e^{-2r/a_0} dr = \left[-\frac{a_0}{2} e^{-2r/a_0}\right]_0^\infty = \frac{a_0}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{r^2}{a_0^2} e^{-2r/a_0} dr = \frac{1}{a_0^2} \int_0^\infty r^2 e^{-2r/a_0} dr =$$

$$\frac{1}{a_0^2}\left(\left[-\frac{a_0}{2} e^{-\frac{2r}{a_0}} r^2\right]_0^\infty + a_0 \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} r dr\right) = \frac{1}{a_0} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} r dr =$$

$$\frac{1}{a_0}\left(\left[-\frac{a_0}{2} r e^{-\frac{2r}{a_0}}\right]_0^\infty + \frac{a_0}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} dr\right) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-\frac{2r}{a_0}} dr = \frac{a_0}{4}$$

ולכן:

$$\left\langle p^2 \right\rangle = \frac{4\hbar^2}{a_0^3}\left[\frac{a_0}{2} - \frac{a_0}{4}\right] = \frac{\hbar^2}{a_0^2}$$

ד. פונקציית הגל תלויה רק במשתנה r כאשר: $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ולכן לא תשתנה אם נחליף בין x, y ו z. לכן $\left\langle x^2 \right\rangle = \left\langle y^2 \right\rangle = \left\langle z^2 \right\rangle$ וכן $\left\langle p_x^2 \right\rangle = \left\langle p_y^2 \right\rangle = \left\langle p_z^2 \right\rangle$. בנוסף, כיוון שממוצע הוא פעולה לינארית מתקיים $\left\langle r^2 \right\rangle = \left\langle x^2 \right\rangle + \left\langle y^2 \right\rangle + \left\langle z^2 \right\rangle$ ולכן $\left\langle x^2 \right\rangle = \left\langle y^2 \right\rangle = \left\langle z^2 \right\rangle = \frac{1}{3}\left\langle r^2 \right\rangle$.
באופן דומה $\left\langle p^2 \right\rangle = \left\langle p_x^2 \right\rangle + \left\langle p_y^2 \right\rangle + \left\langle p_z^2 \right\rangle$ ולכן $\left\langle p_x^2 \right\rangle = \left\langle p_y^2 \right\rangle = \left\langle p_z^2 \right\rangle = \frac{1}{3}\left\langle p^2 \right\rangle$.
ה. לפי הסעיפים הקודמים:

$$\Delta x = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} = \sqrt{\langle x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}\langle r^2 \rangle} = a_0$$

$$\Delta p_x = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle - \langle p_x \rangle^2} = \sqrt{\langle p_x^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{3}\langle p^2 \rangle} = \frac{\hbar}{\sqrt{3} a_0}$$

ולכן:

$$\Delta x \Delta p_x = \Delta y \Delta p_y = \Delta z \Delta p_z = \frac{\hbar}{\sqrt{3}} > \frac{\hbar}{2}$$

עקרון אי הוודאות אכן מתקיים.

1 Mixed infinite well state

חלקיק בבור פוטנציאל ברוחב L. החלקיק הוכן במצב

$$\phi = A\phi_1 + \frac{1}{\sqrt{2}}\phi_2 + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_3 \tag{1}$$

האנרגיות והמצבים העצמיים כבר ידועים. א. מצאו את A. ב. מהו ממוצע ואי־הודאות באנרגיה? ג. מהו ממוצע המיקום במצב מעורב זה? (אנחנו למדנו איך עושים את זה עבור מצב עצמי, אבל האם זה באמת משנה)

1.0.1 פתרון

הסתברות החלקיק להמצא במצב שבו הוא הוכן היא 1.

$$\langle\phi|\phi\rangle = 1 \tag{2}$$

$$(A^*\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_3|)(A|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_3\rangle) = 1 \tag{3}$$

המצבים $|\phi_i\rangle$, הם מצבים עצמיים, כלומר מתקיים $\langle\phi_j|\phi_i\rangle = \delta_{ji}$.

$$|A|^2\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \frac{1}{3}\langle\phi_3|\phi_3\rangle = 1 \tag{4}$$

בצורה מפורשת $A = \frac{1}{\sqrt{6}}$.
ב. מציאת $\langle E\rangle$ ו $\langle\triangle E\rangle$.
נתחיל מ $\langle E\rangle$, כזכור הביטוי לאנרגיה של מצב עצמי כלשהו $E_i = \frac{\hbar^2\pi^2 i^2}{2mL^2}$

$$\langle E\rangle = (A^*\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_3|)E_i(A|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_3\rangle) = \tag{5}$$

$$|A|^2\langle\phi_1|E_1|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}\langle\phi_2|E_2|\phi_2\rangle + \frac{1}{3}\langle\phi_3|E_3|\phi_3\rangle = \tag{6}$$

$$\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(1^2|A|^2\langle\phi_1|\phi_1\rangle + 2^2\frac{1}{2}\langle\phi_2|\phi_2\rangle + 3^2\frac{1}{3}\langle\phi_3|\phi_3\rangle\right) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(|A|^2 + \frac{2^2}{2} + \frac{3^2}{3}\right) = \frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\left(5\frac{1}{6}\right) \tag{7}$$

כדי למצוא את אי־הודאות באנרגיה $\triangle E = \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2}$ יש למצואת את המומנט השני של ממוצע האנרגיה.באופן דומה למה שעשינו קודם

$$\langle E^2\rangle = (A^*\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_3|)E_i^2(A|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_3\rangle) = \tag{8}$$

$$|A|^2\langle\phi_1|E_1^2|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}\langle\phi_2|E_2^2|\phi_2\rangle + \frac{1}{3}\langle\phi_3|E_3^2|\phi_3\rangle = \tag{9}$$

$$\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right)^2\left(1^4|A|^2\langle\phi_1|\phi_1\rangle + \frac{2^4}{2}\langle\phi_2|\phi_2\rangle + \frac{3^4}{3}\langle\phi_3|\phi_3\rangle\right) = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right)^2\left(|A|^2 + \frac{2^4}{2} + \frac{3^4}{3}\right) = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right)^2\left(35\frac{1}{6}\right) \tag{10}$$

$$\triangle E = \sqrt{\langle E^2\rangle - \langle E\rangle^2} = \sqrt{\left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right)^2\left(35\frac{1}{6} - 25\frac{25}{36}\right)} = \left(\frac{\hbar^2\pi^2}{2mL^2}\right)\sqrt{9\frac{17}{36}} \tag{11}$$

ג. מציאת ממוצע המיקום $\langle x\rangle$ לצורך כך יש לחשב את הביטוי הבא בצורה אינטגרלית

$$\langle x\rangle = (A^*\langle\phi_1| + \frac{1}{\sqrt{2}}\langle\phi_2| + \frac{1}{\sqrt{3}}\langle\phi_3|)x(A|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{3}}\phi_3\rangle) = \tag{12}$$

$$|A|^2\langle\phi_1|x|\phi_1\rangle + \frac{1}{2}\langle\phi_2|x|\phi_2\rangle + \frac{1}{3}\langle\phi_3|x|\phi_3\rangle + \frac{2A}{\sqrt{2}}\langle\phi_1|x|\phi_2\rangle + \frac{2A}{\sqrt{3}}\langle\phi_1|x|\phi_3\rangle + \frac{2}{\sqrt{6}}\langle\phi_2|x|\phi_3\rangle \tag{13}$$

יש לשים לב שמתקיים $\mathbf{x}|\phi_i\rangle \neq \lambda|\phi_i\rangle$, כלומר $|\phi\rangle$ לא מצב עצמי של האופרטור **x** . לכן יש צורך לפתור את כל האיברים.

$$\langle\phi_i|x|\phi_i\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) x \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right) dx = \frac{L}{2} \tag{14}$$

$$\langle\phi_1|x|\phi_2\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) x \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx = -\frac{16L}{9\pi^2} \tag{15}$$

$$\langle\phi_1|x|\phi_3\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) x \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) dx = 0 \tag{16}$$

$$\langle\phi_2|x|\phi_3\rangle = \frac{2}{L}\int_0^L \sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) x \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) dx = -\frac{48L}{25\pi^2} \tag{17}$$

לאחר הצבה במש 13 מקבלים

$$\langle x\rangle = \left(\frac{L}{2}\frac{1}{6} + \frac{L}{2}\frac{1}{2} + \frac{L}{2}\frac{1}{3} - \frac{2}{\sqrt{12}}\frac{16L}{9\pi^2} + 0 - \frac{2}{\sqrt{6}}\frac{48L}{25\pi^2}\right) \approx 0.237L \tag{18}$$