פוטנציאל מדרגה

נתון פוטנציאל המתואר ע"י $V(x) = \begin{cases} 0 & x>0 \\ V_0 & x<0 \end{cases}$

וחלקיק בעל פונקציית גל מהצורה Ae^{-ikx} הפוגע מימין במחסום.

א. מהי אנרגיית החלקיק, E?

ב. כתוב את צורת הפתרון ל $x>0$ (כולל גל חוזר) ואת הצורה ל $x<0$ עבור המקרה בו $E>V_0$ והמקרה בו $E<V_0$.

ג. כתוב את מקדמי ההעברה וההחזרה בשני המקרים.

ד. השווה את סעיף ב לצפוי לחלקיק בתורה הקלאסית.

פתרון

א. נציב את הפתרון הנתון במשוואת שרדינגר לקבלת משוואת הדיספרסיה ($V=0$ עבור $x>0$):

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2} = E\psi(x) \Rightarrow \frac{k^2\hbar^2}{2m}Ae^{-ikx} = EAe^{-ikx} \Rightarrow E = \frac{k^2\hbar^2}{2m}$$

ב. הפתרון עבור $x>0$ הינו

$$\psi(x) = Ae^{-ikx} + rAe^{ikx}$$

כאשר r מקדם ההחזרה

במקרה $E>V_0$:

הפתרון עבור $x<0$ הינו :

$$\psi(x) = Ate^{-ik_1x} \qquad , k_1 = \frac{\sqrt{2m(E-V_0)}}{\hbar}$$

כאשר t מקדם ההעברה

במקרה $E<V_0$:

הפתרון עבור $x<0$ הינו:

$$\psi(x) = Ate^{\alpha x} \qquad , \alpha = \frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$$

(לקחנו רק פתרון עם אקספוננט חיובי כי הפתרון עם $e^{-\alpha x}$ מתבדר ב $x\to-\infty$).

ג. את מקדמי ההעברה וההחזרה נמצא מתנאי השפה, נתחיל מ $E>V_0$:

מרציפות פונקציית הגל ב $x=0$:

$$A + rA = tA \Rightarrow r + 1 = t$$

ומרציפות הנגזרת ב $x = 0$:

$$-ikA + ikrA = -ik_1 At \Rightarrow -k + kr = -k_1 (r + 1)$$

$$\Rightarrow r (k + k_1) = k - k_1 \Rightarrow$$

$$r = \frac{k - k_1}{k + k_1} \quad , t = 1 + r = \frac{2k}{k + k_1}$$

נעבור למקרה $E < V_0$:
מרציפות פונקציית הגל ב $x = 0$:

$$A + rA = tA \Rightarrow r + 1 = t$$

ומרציפות הנגזרת ב $x = 0$:

$$-ikA + ikrA = \alpha At \Rightarrow -ik + ikr = \alpha (r + 1)$$

$$\Rightarrow r (ik - \alpha) = ik + \alpha \Rightarrow$$

$$r = \frac{ik + \alpha}{ik - \alpha} \quad , t = 1 + r = \frac{2ik}{ik - \alpha}$$

ד. בתורה הקלאסית אם $E > V_0$ החלקיק יעבור בוודאות את מדרגת הפוטנציאל ולכן לא יהיה גל חוזר כלל. אם $E < V_0$ החלקיק יוחזר מהמדרגה בוודאות ולא תהיה הסתברות למצוא אותו בתוך המדרגה. במקרה הקוונטי יש בשני המקרים הסתברות כלשהי למצוא את החלקיק משני צדי המדרגה.

מחסום ריבועי

נתון מחסום פוטנציאל המוגדר ע"י: $V(x)\begin{cases}0 & x<0\\ V_0 & 0<x<L\\ 0 & L<x\end{cases}$

חלקיק במסה m הנע משמאל לימין מגיע למחסום.

א. הראה כי e^{ikx} נע ימינה ו e^{-ikx} נע שמאלה.

ב. איך נראית פונקציית הגל בכל תחום באנרגיה נמוכה מגובה המחסום?

ג. השתמש בתנאי השפה לקבלת סט משוואות סגורות המתארות את הקבועים של הבעיה (אין צורך לפתור).

ד. הראה שכאשר האקספוננט החיובי באיזור המחסום זניח סיכוי המנהור הוא קטן, מה התנאים לכך? מה הסיכוי למנהור במקרה כזה? נתון כי סיכוי המנהור הוא $T\sim\frac{|\psi(L)|^2}{|\psi(0)|^2}$.

פתרון

א. הפתרון המלא למשוואת שרדינגר הינו $\psi(x,t)=\psi(x)e^{-i\omega t}$ ולכן
אם $\psi(x)=e^{ikx}$ אז הפתרון המלא יהיה $e^{-i(\omega t-kx)}$, גל שנע ימינה.
אם $\psi(x)=e^{-ikx}$ אז הפתרון המלא יהיה $e^{-i(\omega t+kx)}$, גל שנע שמאלה.

ב. נגדיר $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ו $\alpha=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$.
בתחום $x<0$ נקבל את המשוואה $\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}=-k^2\psi(x)$ שפתרונה
$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$ (גל התחלתי שנע ימינה וגל מוחזר שנע שמאלה)
בתחום $0<x<L$ נקבל את המשוואה $\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}=\alpha\psi(x)$ שפתרונה
$\psi(x)=Ce^{\alpha x}+De^{-\alpha x}$
בתחום $L<x$ נקבל את אותה המשוואה כמו בתחום $x<0$ ולכן הפתרון
$\psi(x)=Fe^{ikx}$ (יש רק גל שנע ימינה כי הגל ההתחלתי נע ימינה)

ג. תנאי השפה הינם רציפות פונקציית הגל ונגזרתה בכל מעבר.
מרציפות פונקצייה נקבל:
ב $x=0$

$$A+B=C+D \tag{1}$$

ב $x=L$

$$Ce^{\alpha L}+De^{-\alpha L}=Fe^{ikL} \tag{2}$$

מרציפות נגזרת נקבל:
ב $x=0$

$$ikA-ikB=\alpha C-\alpha D \tag{3}$$

ב $x=L$

$$\alpha Ce^{\alpha L}-\alpha De^{-\alpha L}=ikFe^{ikL} \tag{4}$$

הערה: לא ניתן לנרמל פונקצייה זו שכן יש לנו חלקיק עם תנע נתון, זהו מצב לא פיסיקאלי (שכן יש תמיד אי וודאות בתנע). חלקיק אמיתי מתואר ע"י חבילת גלים.

אם נתונים לנו האנרגיה והאמפליטודה ההתחלתית, A, E אז יש לנו 4 נעלמים B, C, D, F ו 4 משוואות ולכן נוכל למצוא את הנעלמים.

ד. את התנאים לכך שהאקספוננט החיובי באיזור המחסום זניח, כלומר $|D| \ll |C|$ בסימונים שלנו, נקבל מהמשוואות שמצאנו בסעיף הקודם.

נציב את משוואה (2) ב (4):

$$\alpha Ce^{\alpha L}-\alpha De^{-\alpha L}=ikCe^{\alpha L}+ikDe^{-\alpha L}\Rightarrow$$

$$C\left[\alpha e^{\alpha L}-ike^{\alpha L}\right]=D\left[ike^{-\alpha L}+\alpha e^{-\alpha L}\right]\Rightarrow$$

$$C=De^{-2\alpha L}\left(\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}\right)\Rightarrow |C|=|D|\,e^{-2\alpha L}\left|\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}\right|$$

נחשב את $\left|\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}\right|$:

$$\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}=\frac{(\alpha+ik)^2}{(\alpha-ik)(\alpha+ik)}=\frac{\alpha^2-k^2+2ik\alpha}{\alpha^2+k^2}$$

ולכן

$$\left|\frac{\alpha+ik}{\alpha-ik}\right|=\frac{\sqrt{(\alpha^2-k^2)^2+4k^2\alpha^2}}{\alpha^2+k^2}=\frac{\sqrt{\alpha^4+k^4+2k^2\alpha^2}}{\alpha^2+k^2}=\frac{\sqrt{(\alpha^2+k^2)^2}}{\alpha^2+k^2}=1$$

נקבל:

$$|C|=|D|\,e^{-2\alpha L}$$

והתנאי לכך ש $|D| \ll |C|$ הינו $1 \gg e^{-2\alpha L}$ כלומר $L \gg \frac{1}{2\alpha}=\frac{\hbar}{2\sqrt{2m(V_0-E)}}$.

במקרה זה פונקציית הגל באיזור המחסום היא $\psi(x)\approx De^{-\alpha x}$

הסיכוי למנהור במקרה זה:

$$T\sim\frac{\left|\psi\left(L\right)\right|^{2}}{\left|\psi\left(0\right)\right|^{2}}=\frac{\left|De^{-\alpha L}\right|^{2}}{\left|D\right|^{2}}=e^{-2\alpha L}\ll1$$

כלומר, סיכוי המנהור אכן קטן מאוד במקרה זה.

בור פוטנציאל חצי אין סופי

נתון חלקיק בעל מסה m הנע בפוטנציאל מהצורה $U(x)=\begin{cases}\infty & x<0\\ 0 & 0<x<d\\ V_0 & d<x\end{cases}$ המתאר בור פוטנציאל חצי אינסופי. אנרגיית החלקיק מקיימת $0<E<V_0$.

א. כתוב את משוואת שרדינגר הבלתי תלויה בזמן בתוך הבור ומימין לבור. השתמש במשתנים $k=\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}$ ו $\alpha=\frac{\sqrt{2m(V_0-E)}}{\hbar}$. מהם פתרונות המשוואה בכל איזור? הסבר מדוע הפתרון מימין לבור חייב להיות מתואר רק על ידי אקספוננט דועך.

ב. מהם תנאי השפה שפונקציית הגל צריכה לקיים? הראה כי מתקיים הקשר הבא בין k ל α: $k\cot(kd)=-\alpha$. הסבר כיצד ניתן למצוא את האנרגיות העצמיות והמצבים העצמיים של החלקיק (כלומר כתוב את המשוואות שצריך לפתור כדי למצוא את כל המקדמים בפונקציית הגל ואת האנרגייה, אין צורך לפתור את המשוואות).

ג. בהנחה שיש יותר מפתרון אחד אפשרי עבור E, שרטט גרף סכמטי של צפיפות ההסתברות עבור שני המצבים העצמיים בעלי האנרגיות הכי נמוכות. הסבר מה ההבדלים העיקריים בין שני המצבים שציירת (רמז: מה ההבדל במספר הגל בתוך הבור? מה ההבדל במרחק הדעיכה מימין לבור? איך זה בא לידי ביטוי בגרפים?)

פתרון

א. משוואת שרדינגר בתוך הבור:

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}=-k^2\psi(x)$$

שפתרונותיה:

$$\psi(x)=Ae^{ikx}+Be^{-ikx}$$

משוואת שרדינגר מימין לבור:

$$\frac{\partial^2\psi(x)}{\partial x^2}=\alpha^2\psi(x)$$

שפתרונותיה:

$$\psi(x)=Ce^{\alpha x}+De^{-\alpha x}$$

הפתרון מימין לבור עם האקספוננט העולה אינו פיסיקאלי כיוון שאם נשמור אותו, פונקציית הגל תתבדר ב$x\to\infty$. לכן נקבע כי $C=0$.

אין אפשרות למצוא את החלקיק משמאל לבור ולכן פונקציית הגל מתאפסת משמאל לבור.
ב. תנאי השפה הם רציפות פונקציית הגל ב $x = 0$ ו $x = d$ ורציפות נגזרת ב $x = d$.
מרציפות ב $x = 0$:

$$A + B = 0 \Rightarrow B = -A$$

מרציפות ב $x = d$:

$$Ae^{ikd} + Be^{-ikd} = De^{-\alpha d} \Rightarrow A\left(e^{ikd} - e^{-ikd}\right) = De^{-\alpha d} \Rightarrow$$

$$2iA\sin(kd) = De^{-\alpha d} \Rightarrow D = 2iA\sin(kd)\, e^{\alpha d}$$

מרציפות נגזרת ב $x = d$:

$$ikAe^{ikd} - ikBe^{-ikd} = -\alpha De^{-\alpha d} \Rightarrow ikA\left(e^{ikd} + e^{-ikd}\right) = -2\alpha iA\sin(kd)\, e^{\alpha d}e^{-\alpha d} \Rightarrow$$

$$2k\cos(kd) = -2\alpha\sin(kd) \Rightarrow k\cot(kd) = -\alpha$$

כיוון ש k, α הן פונקציות של E המשוואה שקיבלנו היא משוואה עבור E:

$$\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}\cot\left(\frac{\sqrt{2mE}}{\hbar}d\right) = -\frac{\sqrt{2m(V_0 - E)}}{\hbar}$$

ניתן לפתור אותה נומרית עבור m, V_0 נתונים.
פונקציית הגל שקיבלנו היא:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 2iA\sin(kx) & 0 < x < d \\ 2iA\sin(kd)\, e^{\alpha d}e^{-\alpha x} & d < x \end{cases}$$

נותר לנו להסביר איך מוצאים את A, ניתן לעשות זאת ע"י תנאי הנרמול:

$$1=\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(x\right)\right|^{2}dx=4\left|A\right|^{2}\left[\int_{0}^{d}\sin^{2}\left(kx\right)dx+\sin^{2}\left(kd\right)e^{2\alpha d}\int_{d}^{\infty}e^{-2\alpha x}dx\right]=$$

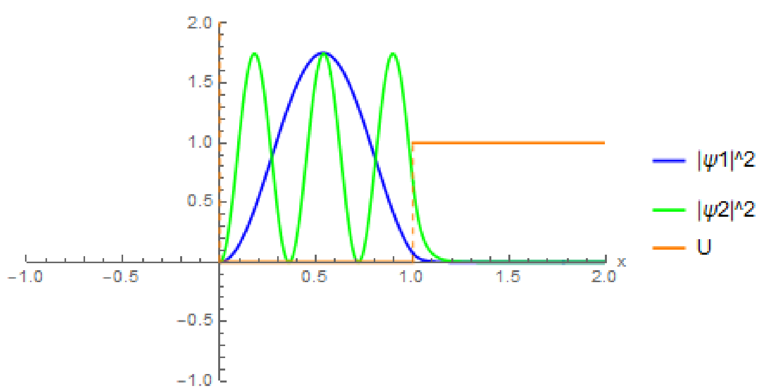
$$4\left|A\right|^{2}\left[\frac{1}{2}\int_{0}^{d}\left[1-\cos\left(2kx\right)\right]dx+\frac{1}{2\alpha}\sin^{2}\left(kd\right)\right]=2\left|A\right|^{2}\left[d-\frac{\sin\left(2kd\right)}{k}+\frac{1}{2\alpha}-\frac{\cos\left(2kd\right)}{2\alpha}\right]$$

ומכאן ניתן למצוא את A:

$$\left|A\right|^{2}=\frac{1}{2\left[d-\frac{\sin(2kd)}{k}+\frac{1}{2\alpha}-\frac{\cos(2kd)}{2\alpha}\right]}$$

הערה: תשובה מספיקה לשאלה זו היא "את האנרגייה ניתן למצוא מהמשוואה שקיבלנו עבור α ו k כי שתיהן פונקציות של E, את A ניתן למצוא מתנאי הנרמול $\int_{-\infty}^{\infty}\left|\psi\left(x\right)\right|^{2}dx$". התשובה כאן היא מעבר לנדרש בקורס אך עוזרת בהבנה.

ג. האנרגייה קובעת את מספר הגל k, ככל שהאנרגיה גבוהה יותר כך מספר הגל גבוה יותר. לכן פונקציית הגל עבור E גדול יותר תעשה תנודות יותר מהירות בתוך הבור. בנוסף האנרגייה קובעת את קבוע הדעיכה α ככל שהאנרגייה יותר קרובה ל V_0 כך α יותר קטן ולכן לפונקציית הגל מימין לבור יידרש מרחק גדול יותר בכדי לדעוך. באיור 1 מוצג גרף של צפיפויות ההסתברות שמתקבל מפתרון נומרי.



איור 1: צפיפות ההסתברות בבור חצי אינסופי עבור שני המצבים בעלי האנרגיות הכי נמוכות. x ביחידות של d, U ביחידות שלV_0, עבור $\frac{mV_0}{\hbar^2}=100$