(3) חשב את הנגזרות הראשונות והשניות של הפונקציות הבאות:

א. $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$

ב. $f(x) = x^2 e^{8x+\cos x}$

ג. $f(x) = 8(x\ln x - x)^3$

ד. $f(x) = x^x$

$\frac{d}{dx}(\ln x) = \frac{1}{x}$

$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a \quad , \frac{d}{dx} e^x = e^x$

$\frac{d}{dx} x^n = n x^{n-1}$

$\frac{d}{dx} fg = f\frac{d}{dx}g + g\frac{d}{dx}f$

$\frac{d}{dx} f(g) = f' \frac{d}{dx}g$

* מה שלא מספיקים בתרגיל - להמשיך בבית.

$f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ א.

$f'(x) = \frac{1}{1-x} - \frac{(1+x)}{(1-x)^2}(-1) = \frac{1}{1-x} + \frac{1+x}{(1-x)^2} = \frac{1-x+1+x}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2}$

$f''(x) = \frac{-4}{(1-x)^3}(-1) = \frac{4}{(1-x)^3}$

$f(x) = x^2 e^{8x+\cos x}$ ב.

$f'(x) = 2x e^{8x+\cos x} + x^2 e^{8x+\cos x}(8-\sin x) =$

$= e^{8x+\cos x}(2x + 8x^2 - x^2 \sin x)$

$f''(x) = e^{8x+\cos x}(2x+8x^2-x^2\sin x)(8-\sin x)$

$+ e^{8x+\cos x}(2+16x-2x\sin x - x^2\cos x)$

$f(x) = 8(x\ln x - x)^3$ ג.

$f'(x) = 24(x\ln x - x)^2(1+\ln x - 1) =$

$= 24(x\ln x - x)^2 \ln x$

$f''(x) = 48(x\ln x - x)(\ln x)^2 + \frac{24}{x}(x\ln x - x)^2$

$f(x) = x^x$ ד.

$f'(x) = x x^{x-1} + x^x \ln x = x^x(1+\ln x)$

$f''(x) = x^x(1+\ln x)^2 + x^x\left(\frac{1}{x}\right) = x^x\left((1+\ln x)^2 + \frac{1}{x}\right)$

a) ii,iii,vii
b) i,vi,vii
c) iii,vii
d) ii,vii
e) v,vii
f) iv

Taylor expansions (actually, expansion around 0 are called Maclaurin expansions):

a. $\sin(x) \approx x - \frac{x^3}{6}$

b. $\cos(x) \approx 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24}$

c. $e^x \approx 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$

d. $\ln(1+x) \approx x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4}$

e. $(1+x)^\alpha \approx 1 + \alpha x + \frac{1}{2}\alpha(\alpha-1)x^2 + \frac{1}{6}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)x^3 + \frac{1}{24}\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)x^4$

## זהויות טריגונומטריות

השתמש בזהויות

$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2} \quad , \quad \sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$$

בכדי להוכיח את הזהות הטריגונומטרית הבאה:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c\cos\left(\theta+\phi\right)$$

כאשר $a, b, c, \phi$ קבועים ממשיים.
בטא את $c, \phi$ בעזרת $a, b$.

## פתרון

ראשית ע"י הכפלת מונה ומכנה ב$i$ בזהות עבור $\sin\theta$ נקבל: $\sin\theta = \frac{ie^{-i\theta}-ie^{i\theta}}{2}$, כעת:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = \frac{\left(a-ib\right)e^{i\theta}+\left(a+ib\right)e^{-i\theta}}{2}$$

נשתמש בהצגה הפולארית של המספרים $a+ib, a-ib$:

$$a\pm ib = ce^{\pm i\tilde{\phi}} \quad , c=\sqrt{a^2+b^2},\ \tilde{\phi} = \begin{cases} \arctan\frac{b}{a} & a>0 \\ -\arctan\frac{b}{a} & a<0 \\ \frac{\pi}{2} & a=0, b\geq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & a=0, b<0 \end{cases}$$

נקבל:

$$a\cos\theta + b\sin\theta = c\frac{e^{-i\tilde{\phi}}e^{i\theta}+e^{i\tilde{\phi}}e^{-i\theta}}{2} = c\frac{e^{i\left(\theta-\tilde{\phi}\right)}+e^{-i\left(\theta-\tilde{\phi}\right)}}{2} = c\cos\left(\theta-\tilde{\phi}\right)$$

קיבלנו את הזהות המבוקשת עם:

$$\phi = -\tilde{\phi} = \begin{cases} -\arctan\frac{b}{a} & a>0 \\ \arctan\frac{b}{a} & a<0 \\ -\frac{\pi}{2} & a=0, b\geq 0 \\ \frac{\pi}{2} & a=0, b<0 \end{cases} \quad , \quad c=\sqrt{a^2+b^2}$$

Solution: 3_1907

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$0 = \left| \begin{pmatrix} 1-\lambda & 1 \\ 1 & -1-\lambda \end{pmatrix} \right| = (1-\lambda)(-1-\lambda) - 1 = \lambda^2 - 2$$

$$\lambda = \pm\sqrt{2}$$

for $\lambda_1 = \sqrt{2}$ we get: $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{\sqrt{2}-1} \end{pmatrix}$.

for $\lambda_2 = -\sqrt{2}$ we get: $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1}{\sqrt{2}+1} \end{pmatrix}$.

# נוסחאת אויילר

הוכח את נוסחת אויילר $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ עבור $\theta$ ממשי. השתמש בפיתוח לטור טיילור סביב $\theta = 0$ (טור מקלורן) של כל אגף בנוסחה והראה כי הטורים זהים.

# פתרון

נפתח לטור מקלורן את אגף ימין:

$$\cos\theta = \sum_{n=0\ n\ is\ even}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\theta^n}{n!}\ ,\ \sin\theta = \sum_{n=0\ n\ is\ odd}^{\infty} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\theta^n}{n!} \Rightarrow$$

$$\cos\theta + i\sin\theta = \sum_{n=0\ n\ is\ even}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\theta^n}{n!} + \sum_{n=0\ n\ is\ odd}^{\infty} i\,(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\theta^n}{n!}$$

כעת נראה כי:

$$e^{i\theta} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\theta)^n}{n!} = \sum_{n=0\ n\ is\ even}^{\infty} (-1)^{\frac{n}{2}} \frac{\theta^n}{n!} + \sum_{n=0\ n\ is\ odd}^{\infty} i\,(-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\theta^n}{n!}$$

כלומר קיבלנו את אותו טור עבור שני האגפים. מכך שטור טיילור של פונקצייה הינו יחיד נובע כי נוסחאת אויילר נכונה.