התאבכות

נביט על גל שנוצר מסכום של שני גלים בעלי אותה תדירות אותו מספר גל, אותה אמפליטודה ואותה פאזה:

$$\psi\left(x,t\right)=A\cos\left(\omega t-kx_1+\varphi\right)+A\cos\left(\omega t-kx_2+\varphi\right)=$$

$$2A\cos\left(\frac{2\omega t-k\left(x_1+x_2\right)+2\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{k\left(x_1-x_2\right)}{2}\right)$$

קיבלנו גל (הקוסינוס השמאלי) עם אמפליטודה תלויית מיקום (קוסינוס ימני), כלומר חבילת גלים כפי שלמדנו בתרגול הקודם. האמפליטודה המקסימאלית תתקבל בנקודות בהן:

$$\frac{k\left(x_1-x_2\right)}{2}=\pi n\Rightarrow x_1-x_2=\frac{2\pi n}{k}=\lambda n$$

זו התאבכות בונה. תתקבל כאשר הפרש הדרכים של הגלים יהיה מספר שלם של אורכי גל.

האמפליטודה המינימאלית תתקבל בנקודות בהן:

$$\frac{k\left(x_1-x_2\right)}{2}=\frac{\pi}{2}+\pi n\Rightarrow x_1-x_2=\frac{\pi}{k}+\frac{2\pi n}{k}=\frac{\lambda}{2}+\lambda n$$

זו התאבכות הורסת. תתקבל כאשר הפרש הדרכים הוא מספר שלם של אורכי גל ועוד חצי אורך גל.

דוגמה: התאבכות גלי קול

התאבכות מסדק בודד

למדתם בכיתה על התאבכות מסדק יחיד ומשני סדקים. נרצה להבין מה הקשר בין תבנית ההתאבכות לטרנספורם פורייה שלמדנו בתרגול הקודם. לצורך כך נביט על התאבכות מסדק בודד.

נתון מקור אור מונוכרומטי המשדר באמפליטודה A, תדירות זוויתית ω ומספר גל k. האור פוגע במחיצה ובה סדק ברוחב d. מאחורי המחיצה, במרחק L, המקיים $L\gg d$, נמצא מסך. נרצה לחשב את עוצמת האור שייפגע במסך.

תזכורת: בכיתה למדתם את עקרון הוייגנס שקובע כי ניתן להסתכל על כל נקודה בסדק כמקור גל חדש. בעזרת עקרון זה ערכתם חישוב מקורב שתוצאתו הייתה שיהיה כתם אור ברוחב זוויתי $\Delta\theta=\frac{2\lambda}{d}$. נרצה לחשב באופן מדוייק יותר.

נביט על נקודה במסך שנמצאת בזוית θ ממרכז הסדק (ראה איור 1). האור שפוגע בנקודה זו מורכב מגלים שונים, כל גל מנקודה אחרת בסדק. כל גל כזה ניתן לתאר ע"י $Ae^{i(\omega t-kl)}$ כאשר l המרחק שהגל עבר מהסדק ועד למסך.

נקבע מערכת צירים שראשיתה במרכז הסדק. נתמקד בגל שהתחיל מנקודה בגובה y ממרכז הסדק. גל זה התחיל בנקודה $(0,y)$ ופגע במסך בנקודה $(L, L\tan\theta)$. המרחק שהוא עבר הינו:

$$l\left(y\right)=\sqrt{L^{2}+\left(L\tan\theta-y\right)^{2}}=L\sqrt{1+\left(\tan\theta-\frac{y}{L}\right)^{2}}$$

נשתמש בכך ש $\frac{y}{L}<\frac{d}{L}\ll 1$ ונפתח בטור טיילור:

$$l\left(y\right)\approx L\left(\sqrt{1+\tan^{2}\theta}-\frac{\tan\theta}{\sqrt{1+\tan^{2}\theta}}\frac{y}{L}\right)=\frac{L}{\cos\theta}-y\sin\theta$$

כאשר השתמשנו בכך ש: $\sqrt{1+\tan^{2}\theta}=\sqrt{1+\frac{\sin^{2}\theta}{\cos^{2}\theta}}=\sqrt{\frac{\cos^{2}\theta+\sin^{2}\theta}{\cos^{2}\theta}}=\frac{1}{\cos\theta}$.

אם כך, האור שפוגע במסך בנקודה בזוית θ מורכב מכל הגלים שיצאו מנקודות שונות בסדק עם y בין $-\frac{d}{2}$ ו $\frac{d}{2}$ כלומר:

$$\psi\left(t,\theta\right)=A\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}e^{i(\omega t-kl(y))}dy=A\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}e^{i\left(\omega t-\frac{kL}{\cos\theta}+yk\sin\theta\right)}dy=Ae^{i\left(\omega t-\frac{kL}{\cos\theta}\right)}\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}e^{iyk\sin\theta}dy$$

למעשה מעניין אותנו רק האינטרגל כי אנחנו רוצים לדעת מהי עוצמת האור על המסך, שהיא $I\propto\left|\psi\left(t,\theta\right)\right|^{2}=A^{2}\left|\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}e^{iyk\sin\theta}dy\right|^{2}$

נסמן $k'=k\sin\theta$ ונראה כי האינטגרל הוא בעצם טרנספורם פורייה:

$$\int_{-\frac{d}{2}}^{\frac{d}{2}}e^{-iyk'}dy=\frac{e^{i\frac{d}{2}k'}-e^{-i\frac{d}{2}k'}}{ik'}=\frac{2\sin\left(\frac{d}{2}k'\right)}{k'}=dsinc\left(\frac{d}{2}k\sin\theta\right)$$

כאשר מוגדר $sinc\left(x\right)=\frac{\sin x}{x}$. אם כך גילינו כי האור הפוגע במסך הוא בעצם טרנספורם פורייה של הסדק בו הוא עבר.

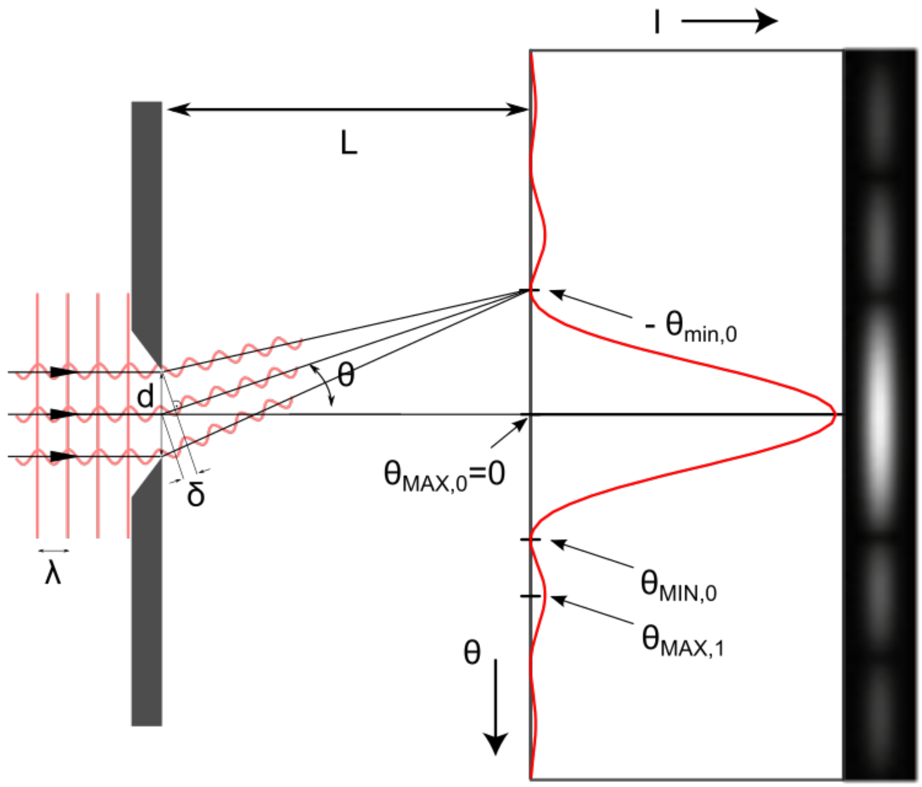
עוצמת האור הפוגע היא $I\propto sinc^{2}\left(\frac{d}{2}k\sin\theta\right)$.

המרחק בין האנך ממרכז הסדק למסך ובין הנקודה בזווית θ הוא $y=L\tan\theta$. אם הזווית θ קטנה יחסית $\sin\theta\approx\tan\theta$ ונקבל את עוצמת האור כפונקצייה של המרחק מהאנך המרכזי, y:

$$I\propto sinc^{2}\left(\frac{dk}{2L}y\right)$$

נקודות ההתאפסות של עוצמת האור יתקבלו כאשר $\frac{dk}{2L}y=\pm\pi$ (הנקודה בה $\frac{dk}{2L}y=0$ אינה נקודת התאפסות אלא מקסימום כיוון ש $\lim_{x\to0}\frac{\sin(x)}{x}=1$).

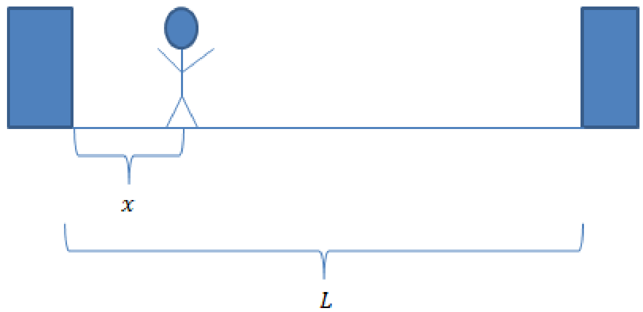
כלומר, נקבל כתם אור מרכזי בין הנקודות $y_{\pm}=\pm\frac{2\pi}{k}\frac{L}{d}=\pm\frac{\lambda L}{d}$, כלומר כתם ברוחב $\frac{2\lambda L}{d}$. בקירוב של זוויות קטנות (שתקף כאשר $\lambda\ll d$) נוכל לשחזר את התוצאה מהכיתה ע"י $y=L\tan\theta\approx L\theta$ ולכן רוחב זוית הכתם המרכזי $\Delta\theta=\frac{2\lambda}{d}$.



איור 1: התאבכות מסדק בודד (לקוח מויקיפדיה)

הערה: הקשר בין "רוחב החבילה בזמן" ו "רוחב החבילה בתדר" שלמדנו בתרגול הקודם בא לידי ביטוי כאן בקשר בין רוחב הסדק לרוחב הכתם המרכזי, ככול שהסדק גדול יותר הכתם קטן יותר ולהפך.

דוגמה נוספת (אם נשאר זמן) התאבכות משני סדקים



איור 1:

התאבכות גלי קול

התאבכות גלי קול. 2 רמקולים שמשדרים בתדירות של 170 הרץ ובפאזה זהה. (כזכור מהירות הקול באוויר היא כ340 מטר לשנייה)

א. נניח כי שניהם נמצאים על אותו קו במרחק של 20 מטר אחד מהשני, מופנים אחד כלפי השני, היכן יש לעמוד כדי לא לשמוע דבר?

ב. כעת נשים אותם אחד על השני מופנים כלפי השומע במרחק 5 מטר ממנו. לאט לאט נעלה את אחד הרמקולים במאונך לקו המחבר בין הרמקול הנייח לשומע באילו גבהים לא יישמע השומע כלום?

פתרון

א. כדי לא לשמוע דבר נרצה לעמוד בנקודה בה נוצרת התאבכות הורסת בין גלי הקול. אם אנחנו עומדים במרחק x מהרמקול השמאלי (ראה איור 1) הגל הראשון עובר מרחק x ואילו השני מרחק $L-x$ ($L=20m$ המרחק בין הרמקולים).

להתאבכות הורסת נרצה שהפרש הדרכים של הגלים יהיה מספר שלם של אורכי גל ועוד חצי אורך גל. כלומר:

$$(L-x)-x=L-2x=\lambda\left(n+\frac{1}{2}\right)\Rightarrow$$

$$x=\frac{L-\lambda\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2}$$

אורך הגל של גלי הקול הינו $\lambda=\frac{2\pi}{k}=\frac{2\pi v}{\omega}=\frac{v}{f}=\frac{340}{170}m=2m$ ולכן נרצה לעמוד במרחק $x=\frac{20-2\left(n+\frac{1}{2}\right)}{2}m=(9.5-n)\,m$. n יכול להיות כל מספר שלם, כלומר במרחקים $0.5,1.5,2.5,3.5...19.5$ מהרמקול השמאלי לא נשמע דבר.

ב. נסמן את המרחק בין הרמקולים בa. המרחק מהרמקול התחתון לצופה הוא $x_1 = 5m$. המרחק מהרמקול העליון לצופה הוא $x_2 = \sqrt{x_1^2 + a^2}$. עבור התאבכות הורסת נדרוש כי $x_2 - x_1 = \lambda\left(n + \frac{1}{2}\right)$
נציב ונקבל:

$$\sqrt{x_1^2 + a^2} - x_1 = \lambda\left(n + \frac{1}{2}\right) \Rightarrow a^2 = \left(x_1 + \lambda\left(n + \frac{1}{2}\right)\right)^2 - x_1^2 \Rightarrow$$

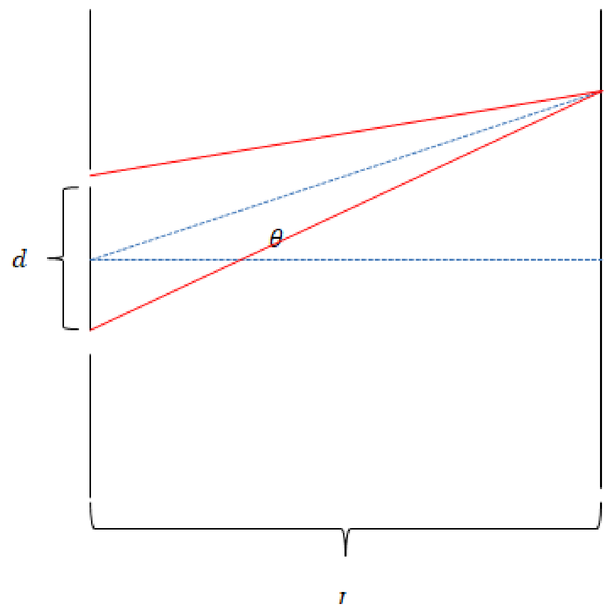
$$a = \sqrt{\lambda^2\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 2\lambda\left(n + \frac{1}{2}\right)x_1}m = \sqrt{4\left(n + \frac{1}{2}\right)^2 + 20\left(n + \frac{1}{2}\right)}m =$$

$$\sqrt{4n^2 + 24n + 11}m$$

כלומר הרמקולים צריכים להיות במרחק $\sqrt{4n^2 + 24n + 11}$ זה מזה (כאשר n מספר שלם) בכדי שהשומע לא ישמע כלום.

ניסויי יאנג ־התאבכות משני סדקים

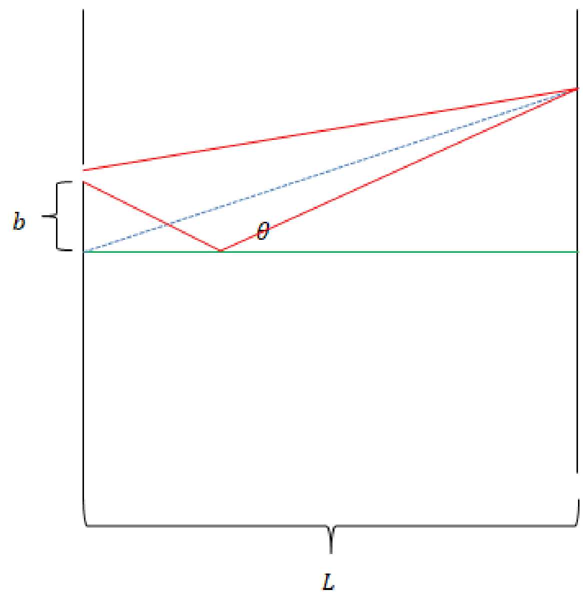
ניסוי יאנג בשני סדקים שהמרווח ביניהם הוא d והמרחק למסך הוא L כאשר נתון $L \gg d$.
מוקרנים ע`י לייזר באורך גל λ



איור 1: שני סדקים

א. מהו המרחק בין האנך המרכזי מהסדקים על המסך לבין נקודת האור הnית בקירוב של זוויות קטנות $\theta \ll 1$?

ב. מהו המרחק בין נקודות אור? ובין נקודות חושך? בקירוב זה.



איור 2: סדק ומראה

ג. כעת נקח ונשים מראה בין הסדקים מרחק b מהסדק העליון . נסתכל רק על המסך שמעל המראה. היכן יהיו נקודות אור? מה המרחק ביניהן? (בקירוב זוויות קטנות)

פתרון:

א. ע"פ עקרון הוייגנס ניתן להסתכל על כל סדק כמקור אור חדש. המרחק שהאור עובר מהסדק העליון, l_+והתחתון l_- ועד לנקודה שנמצאת בזוית θ לאנך מהמרכז בין שני הסדקים לאנך הינו:

$$l_\pm = L\sqrt{1+\left(\tan\theta \mp \frac{d}{2}\right)^2} \approx L\frac{1}{\cos\theta} \mp \frac{d}{2}\sin\theta$$

כאשר השתמשנו בפיתוח לסדר ראשון של טור טיילור עבור $\frac{L}{d}$ סביב 0 ובכך ש $1+\tan^2\theta = \frac{1}{\cos^2\theta}$. הפרש המרחקים הינו:

$$\Delta l = l_- - l_+ = d\sin\theta$$

התאבכות בונה תתרחש כאשר שני הגלים יגיעו באותה פאזה, כלומר כאשר ההפרש יהיה מספר שלם של אורכי גל:

$$\Delta l = n\lambda$$

כאשר n מספר שלם. נקודות אלו הן נקודות האור. נקודת האור הn ית תתקבל בזווית $\theta = \arcsin \frac{n\lambda}{d}$
כלומר במרחק $L\tan\theta$ מהאנך המרכזי. בקירוב של זוויות קטנות נקבל כי מרחק זה הינו $\frac{n\lambda L}{d}$.

ב. המרחק בין נקודות האור $\frac{\lambda L}{d}$ (זה המרחק בין נקודת האור ה n וה $n-1$).

נקודות החושך יתקבלנו כאשר הפרש המרחקים יהיה שווה למספר שלם של אורכי גל ועוד חצי אורך גל:

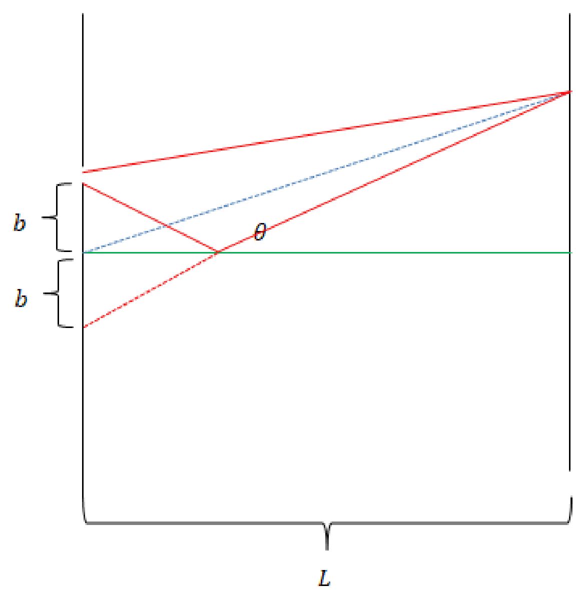
$$\Delta l = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

כלומר כאשר $\sin\theta \approx \theta = \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$ או לחילופין במרחק $L\tan\theta \approx \left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda L}{d}$ מהאנך המרכזי.

המרחק בין נקודות החושך אם כן זהה למרחק בין נקודות האור (באמצע בין כל שתי נקודות אור יש נקודת חושך).

ג. כעת יש לנו גל אחד שמגיע מהסדק ישירות למסך וגל אחד שמוחזר מהמראה ומגיע למסך. הפרש הדרכים שהגלים עוברים זהה למצב שבו יש שני סדקים במרחק $2b$ זה מזה (ראה איור 3). בנוסף הגל שמוחזר מהמראה צובר פאזה של π שזו אותה פאזה שהייתה נצברת אילו היה עובר חצי אורך גל יותר.

לכן נקודות האור יהיו במרחק $\left(n+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda L}{2b}$ מהמראה והמרחק ביניהן יהיה $\frac{\lambda L}{2b}$.



איור 3: סדק ומראה - השוואה לשני סדקים