אנליזת פורייה

ראינו בשיעורים הקודמים שקיימים פתרונות של גלים נעים עבור משוואות גלים שונות (גלים במיתר, קו תמסורת, גלי אלקטרו־מגנטיים). ראינו גם מהי מהירות ההתקדמות של גל כזה (מהירות הפאזה) ומהו הקשר בין מספר הגל ובין התדירות הזוויתית (יחס הנפיצה). אבל מה קורה אם אנחנו יוצרים פולס שאינו גל קוסינוס נקי?

במקרה כזה נשתמש באנליזת פורייה. ז'אן בטיסט ג'וזף פורייה, שהיה מתמטיקאי, פיסיקאי ומהנדס במאה ה18 גילה שכל פונקציה ניתן לכתוב כסופר־פוזיציה של קוסינוס וסינוס. בכיתה ראיתם שעבור פונקציה מחזורית $f\left(t\right)$ עם זמן מחזור T, כלומר $f\left(t+T\right)=f\left(t\right)$, ניתן לעשות זאת ע"י כפולות שלמות של $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$ ע"י:

$$f\left(t\right)=B_0+\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\left(n\omega_1 t\right)+\sum_{n=1}^{\infty}B_n\cos\left(n\omega_1 t\right)$$

כאשר $B_0=\frac{1}{T}\int_0^T f\left(t\right)dt \quad A_n=\frac{2}{T}\int_0^T f\left(t\right)\sin\left(\omega_1 nt\right)dt \quad B_n=\frac{2}{T}\int_0^T f\left(t\right)\cos\left(\omega_1 nt\right)dt$

ועבור פונקצייה שאינה מחזורית נסכום על כל התדרים, כאשר הכי נוח להשתמש בטרנפורם מרוכב:

$$f\left(x\right)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}\left(\omega\right)e^{-i\omega t}d\omega$$

כאשר:

$$\tilde{f}\left(\omega\right)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}f\left(t\right)e^{i\omega t}dt$$

הערה: ישנן הגדרון שונות לטרנספורם פורייה, ההגדרות נבדלות ביניהן־

א. בסימן באקספוננט ־ בחלק מהמקומות תראו הגדרות עם $e^{i\omega t}$ בטרנספורם ו $e^{-i\omega t}$ בטרנספורם ההפוך ובחלק $e^{-i\omega t}$ בטרנספורם ו $e^{i\omega t}$ בטרנספורם ההפוך.

ב. בקבועים ־ הקבועים בהם מכפילים את האינטרגל בהגדרה שונים ממקום למקום (למשל $\frac{1}{\pi}$ בטרנספורם ו $\frac{1}{2}$ בטרנספורם ההפוך בהגדרה שנתתי כאן).

ההגדרה שנתתי כאן היא ההגדרה שלמדתם בהרצאות. ניתן להשתמש בכל הגדרה שתבחרו בתנאי שהסימנים באקספוננט בטרנספורם ובטרנספורם ההפוך שונים ומכפלת הקבועים בטרנספורם ובטרנספורם ההפוך תתן $\frac{1}{2\pi}$.

דוגמה: טרנספורם פורייה של גיאוסיאן.

מהירות חבורה

נניח שיש לנו פולס כלשהו בתווך המקיים משוואת דיספרסיה כלשהי $\omega=\omega\left(k\right)\approx\omega\left(k_0\right)+\frac{d\omega}{dk}\left(k-k_0\right)$, כלומר הפולס מורכב מגלים עם מספרי גל הקרובים מאוד לk_0, כך ש $\left|k-k_0\right|\ll k_0$. נרצה לדעת באיזה מהירות ינוע הפולס.

נשתמש בטרנספורם פורייה בכדי לבטא את הפולס ע"י גלים הרמוניים, נסמן $\omega\left(k_0\right)=\omega_0$, $\frac{d\omega}{dk}=\alpha$, $k-k_0=\Delta k$

$$f(x,t)=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)\,e^{-i(\omega(k)t-kx)}dk=\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)\,e^{-i(\omega_0 t+\alpha(k-k_0)t-(k-k_0)x-k_0x)}dk=$$

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)\,e^{-i(\omega_0 t+\alpha\Delta kt-\Delta kx-k_0x)}d\Delta k$$

נוציא איברים שלא תלויים ב k מחוץ לאינטגרל:

$$\frac{1}{2}e^{-i(\omega_0 t-k_0x)}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{f}(k)\,e^{-i\Delta k(\alpha t-x)}d\Delta k$$

קיבלנו גל כם מספר גל גבוהה k_0 הנע ימינה במהירות $\frac{\omega_0}{k_0}$, כלומר במהירות ה**פאזה**. ומעטפת $\tilde{f}(k)$ בעלת מספר גל נמוך Δk הנעה במהירות $\alpha=\frac{d\omega}{dk}$, מהירות החבורה.

הערה: מידע אפשרי להעביר ממקום למקום רק באמצעות פולסים (גל הרמוני לא מכיל שום מידע חוץ ממספר הגל והתדר שלו), למעשה מהירות האור היא מגבלה רק על מהירות החבורה של גלים ולא על מהירות הפאזה שלהם. יש גלים שמהירות הפאזה שלהם גבוהה ממהירות האור.

דוגמה: חבילת גלים גיאוסיאנית.

התמרת פורייה של גיאוסיאן

חשב את התמרת פורייה עבור הפונקצייה הבאה:

$$g\left(x\right)=\frac{1}{\sigma}e^{-\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}}$$

פתרון:

$$\tilde{g}\left(k\right)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}-ikx}dx$$

נשלים לריבוע:

$$\frac{x^{2}}{2\sigma^{2}}+ikx=\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x+a\right)^{2}+b\Rightarrow$$

$$\frac{a}{\sigma^{2}}=ik\Rightarrow a=ik\sigma^{2}$$

$$\frac{a^{2}}{2\sigma^{2}}+b=0\Rightarrow b=\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}$$

נקבל:

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x+ik\sigma^{2}\right)^{2}-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}dx=\frac{e^{-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2\sigma^{2}}\left(x+ik^{2}\sigma^{2}\right)^{2}}dx$$

נחליף משתנים $du=\frac{1}{\sqrt{2\sigma^{2}}}\quad u=\frac{x+ik^{2}\sigma^{2}}{\sqrt{2\sigma^{2}}}$ ונקבל:

$$\frac{e^{-\frac{k^{2}\sigma^{2}}{2}}}{2\sqrt{\pi}\sigma^{2}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^{2}}du$$

כעת נשתמש באינטגרל הגיאוסיאני:

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^{2}}du=\sqrt{\pi}$$

ונקבל:

$$\tilde{g}\left(k\right)=\frac{1}{2\sigma^2}e^{-\frac{k^2\sigma^2}{2}}$$

התמרת פורייה של גיאוסיאן עם רוחב σ היא גיאוסיאן עם רוחב $\frac{1}{\sigma}$. אם הגיאוסיאן המקורי היה צר, ההתמרה שלו רחבה ולהפך.

חבילה גאוסית

נתונה חבילת גלים גאוסית $\tilde{a}\left(k\right)=A\exp\left(-\sigma\left(k-k_{0}\right)^{2}\right)$ כאשר A,k_{0},σ קבועים.
מהי ההתפתחות בזמן של חבילת גלים זו?
מהי השפעתו של כל אחד משלושת האיברים הראשונים בפיתוח טיילור של $\omega\left(k\right)$?
נתון $\omega\left(k\right)\approx\omega_{0}+\alpha\left(k-k_{0}\right)+\frac{1}{2}\beta\left(k-k_{0}\right)^{2}$.

פתרון

נתונה לנו התמרת פורייה של חבילת הגלים שלנו, חבילת הגלים כפונקצייה של x היא

$$a\left(x\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{a}\left(k\right)e^{-ikx}dk$$

כל גל כזה מתקדם בזמן עם תדר $\omega\left(k\right)$ מתאים:

$$a\left(x,t\right)=\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{a}\left(k\right)e^{i\left(\omega\left(k\right)t-kx\right)}dk$$

נסמן $k-k_{0}=\Delta k$ ונציב את $\omega\left(k\right)$:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{a}\left(k\right)e^{i\left(\omega_{0}t+\alpha\Delta kt+\frac{1}{2}\beta\Delta k^{2}t-\Delta kx-k_{0}x\right)}d\Delta k=e^{i\left(\omega_{0}t-k_{0}x\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\tilde{a}\left(k\right)e^{i\left(\Delta k\left(\alpha t-x\right)+\frac{1}{2}\beta\Delta k^{2}t\right)}d\Delta k$$

כעת נציב את $\tilde{a}\left(k\right)$ הנתון

$$Ae^{i\left(\omega_{0}t-k_{0}x\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\sigma\Delta k^{2}+i\Delta k\left(\alpha t-x\right)+\frac{i}{2}\beta\Delta k^{2}t\right)d\Delta k=$$

$$Ae^{i\left(\omega_{0}t-k_{0}x\right)}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\left(-\Delta k^{2}\left(\sigma-\frac{i}{2}\beta t\right)+i\Delta k\left(\alpha t-x\right)\right)d\Delta k$$

נסמן $\left(\alpha t-x\right)=b\quad\sigma-\frac{i}{2}\beta t=a$
השלמה לריבוע תיתן:

$$-\Delta k^{2}a+i\Delta kb=-\left(\Delta k\sqrt{a}-i\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^{2}-\frac{b^{2}}{4a}$$

נקבל:

$$Ae^{i(\omega_0 t - k_0 x) - \frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\left(\Delta k\sqrt{a} + i\frac{b}{2\sqrt{a}}\right)^2\right) d\Delta k$$

נחליף משתנה $du = \sqrt{a}d\Delta k \quad u = \Delta k\sqrt{a} + i\frac{b}{2\sqrt{a}}$ ונקבל:

$$Ae^{i(\omega_0 t - k_0 x) - \frac{b^2}{4a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = A\sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{i(\omega_0 t - k_0 x) - \frac{b^2}{4a}}$$

נציב בחזרה את a ו b:

$$a(x,t) = A\sqrt{\frac{\pi}{\sigma - \frac{i}{2}\beta t}} e^{i(\omega_0 t - k_0 x)} \exp\left(-\frac{(\alpha t - x)^2}{4\left(\sigma - \frac{i}{2}\beta t\right)}\right)$$

לבסוף נראה כי:

$$-\frac{(\alpha t - x)^2}{4\left(\sigma - \frac{i}{2}\beta t\right)} = -\frac{\sigma(\alpha t - x)^2}{4\sigma^2 + \beta^2 t^2} - i\frac{\frac{\beta}{2}(\alpha t - x)^2}{4\sigma^2 + \beta^2 t^2}$$

נסמן: $\varphi = -\frac{\frac{\beta}{2}(\alpha t - x)^2}{4\sigma^2 + \beta^2 t^2}$
וכן:

$$\frac{\pi}{\sigma - \frac{i}{2}\beta t} = \frac{\pi}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{4}\beta^2 t^2}} e^{i\tilde{\varphi}}$$

כאשר:

$$\tilde{\varphi} = \arctan\left(\frac{\beta t}{2\sigma}\right)$$

ונקבל

$$a(x,t) = A\sqrt{\frac{\pi}{\sqrt{\sigma^2 + \frac{1}{4}\beta^2 t^2}}} e^{i(\omega_0 t - k_0 x + \varphi + \tilde{\varphi})} \exp\left(-\frac{(\alpha t - x)^2}{4\sigma^2 + \beta^2 t^2}\right)$$

ההתפתחות בזמן של חבילת הגלים שלנו נשלטת ע"י ω_0, α, β בצורה הבאה:

1. קיבלנו גל הנע במהירות פאזה שהיא בקירוב $\frac{\omega_0}{k_0}$ עם תיקונים שתלויים בβ (שימו לב שעבור $\beta = 0$ נקבל $\varphi = \tilde{\varphi} = 0$ ונחזור למהירות פאזה $\frac{\omega_0}{k_0}$ במדוייק).

2. המעטפת של גל זה היא גיאוסיאן. מרכז הגיאוסיאן בנקודה $x = \alpha t$, כדומר נע ימינה במהירות α (מהירות החבורה)
3. β משפיע בשתי דרכים על המעטפת: א. הוא גורם לגיאוסיאן להיות רחב יותר ככל שעובר הזמן וב. הוא מקטין את המעטפת ככל שעובר הזמן.
4. הפאזות של הגל φ ו $\tilde{\varphi}$ משתנות עם הזמן כתלות ב β וב α.