שימור אנרגיה במעבר בין תווכים

בשבוע שעבר דיברנו על מקדמי העברה והחזרה במעבר גל בין מיתרים שונים. נראה שמתקיים שימור אנרגיה במעבר. במקרה זה נרצה להראות שכל האנרגיה שהגיע למעבר בין התווכים ביחידת זמן עברה או הוחזרה.

נחזור למודל הקפיצים שלנו, האנרגיה של כל קפיץ הינה $E_n = \frac{1}{2}k\left(y_n - y_{n-1}\right)^2 + \frac{1}{2}mv_n^2$. אנחנו רוצים לחשב את האנרגיה ליחידת אורך ולהכפיל במהירות הגל (ככה נקבל כמה אנרגיה עוברת דרך כל הנקודה ביחידת זמן). נחלק במרחק בין הקפיצים שלנו ונקח את גבול הרצף:

$$E_{density} = \frac{1}{2}ak\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{a}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{m}{a}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 \underset{a\to 0}{\rightarrow} \frac{1}{2}T\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2$$

נציב את הפתרון של גל נע ונקבל:

$$E_{demsity} = \left(\frac{1}{2}TK^2 + \frac{1}{2}\rho\omega^2\right)A^2\cos^2\left(\omega t - Kx + \varphi\right) = TK^2A^2\cos^2\left(\omega t - Kx + \varphi\right)$$

ואם נמצע על זמן גל שלם נקבל $\frac{1}{2}$ במקום הקוסינוס. לכן צפיפות האנרגיה הממוצעת $\langle E_{density}\rangle = \frac{1}{2}TK^2A^2$. וזרם האנרגיה (כמה אנרגיה עוברת בנקודה ליחידת זמן, שהיא צפיפות האנרגיה כפול מהירות הגל) $E_{flux} = \frac{1}{2}TK\omega A^2$

כעת נוכל לראות שימור אנרגיה במעבר בין מיתרים. ראינו בתרגול את מקדם ההעברה וההחזרה:

$$R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} \quad T = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$$

אם כך, זרם האנרגיה הנכנס היא:

$$E_{flux}^{in} = \frac{1}{2}T_1K_1\omega A_i^2$$

זרם האנרגיה היוצא:

$$E_{flux}^{out} = \frac{1}{2}T_1K_1\omega A_r^2 + \frac{1}{2}T_2K_2\omega A_t^2$$

נזכר כי העכבה במיתר היא $Z = T\frac{K}{\omega}$ ונקבל:

$$E_{flux}^{in} = \frac{1}{2}Z_1\omega^2A_i^2$$

$$E_{flux}^{out}=\frac{1}{2}Z_1\omega^2A_i^2R^2+\frac{1}{2}Z_2\omega^2A_i^2T^2=\frac{1}{2}\omega^2A_i^2\left(Z_1R^2+Z_2T^2\right)$$

לכן שימור אנרגיה דורש ש $Z_1R^2+Z_2T^2=Z_1$, נוודא זאת:

$$Z_1R^2+Z_2T^2=Z_1\frac{Z_1^2+Z_2^2-2Z_1Z_2}{\left(Z_1+Z_2\right)^2}+Z_2\frac{4Z_1^2}{\left(Z_1+Z_2\right)^2}=\frac{Z_1\left(Z_1^2+Z_2^2+2Z_1Z_2\right)}{\left(Z_1+Z_2\right)^2}=Z_1$$

קו תמסורת

בתרגולים והשיעורים הקודמים פיתחנו את משוואת הגלים עבור מיתר ובעזרתה מצאנו את יחס הדיספרסיה במיתר ואת העכבה במיתר (ודרכן את מהירות הפאזה של הגלים ואת מקדמי ההעברה וההחזרה). נרצה לפתח משוואה דומה עבור קו תמסורת שהינו מעגל חשמלי המורכב מקבלים וסלילים (אוסף של מעגלי LC).

ראה פיתוח משוואת הגלים בפתרון לתרגיל 1 המצורף

עכבה של קו תמסורת

קיבלנו את משוואת הגלים עבור קו תמסורת:

$$\frac{\partial^2I\left(x,t\right)}{\partial t^2}=\frac{1}{\mathcal{LC}}\frac{\partial^2I\left(x,t\right)}{\partial x^2}$$

נרצה להגדיר עכבה שתעזור לנו בחישוב העברה והחזרה בין קווי תמסורת שונים. במקרה של מיתר הגדרנו עכבה כיחס בין הכח המופעל למהירות בנקודה. במקרה שלנו את תפקיד המהירות ממלא הזרם I ואת תפקיד הכח ממלא המתח V. לכן נגדיר עכבה חשמלית כ $Z=\frac{V}{I}$. מהי העכבה של קו התמסורת שלנו? נחזור לקו התמסורת שהתחלנו איתו (לפני גבול הרצף). המתח על כל קבל הוא $V_n=\frac{Q_n}{C}$נגזור לפי הזמן ונקבל:

$$C\frac{\partial V_n}{\partial t}=\frac{\partial Q_n}{\partial t}=I_n-I_{n+1}=-h\frac{I_{n+1}-I_n}{h}=-h\frac{\partial I\left(x,t\right)}{\partial x}$$

ולכן:

$$\frac{\partial V\left(x,t\right)}{\partial t}=-\frac{1}{\mathcal{C}}\frac{\partial I\left(x,t\right)}{\partial x}$$

ננחש פתרונות של גלים נעים עבור I ו V $I\left(x,t\right)=I_0\cos\left(\omega t-Kx+\varphi\right)$ ו $V\left(x,t\right)=V_0\cos\left(\omega t-Kx+\varphi\right)$, נציב ונקבל:

$$-\omega V_0 \sin(\omega t - Kx + \varphi) = -\frac{K}{\mathcal{C}} I_0 \sin(\omega t - Kx + \varphi) \Rightarrow Z = \frac{V_0}{I_0 \mathcal{C}} = \frac{K}{\omega \mathcal{C}} = \sqrt{\frac{\mathcal{L}}{\mathcal{C}}}$$

הערה: בעזרת עכבה זו נוכל להשתמש בנוסחאות למקדמי ההעברה וההחזרה שמצאנו בתרגול קודם עבור העברה והחזרה בחיבור בין קווי תמסורת בעלי עכבות שונות.

מעבר גל אלקטרומגנטי בין תווכים

כעת נרצה להשתמש בתוצאה מקו התמסורת ולחשב את מקדמי ההעברה וההחזרה עבור גל אלקטרומגנטי. נשתמש בכך שמתח יוצר שדה מגנטי ואילו זרם יוצר שדה חשמלי. בנוסף, אם ההשראות והקיבול ליחידת אורך בריק (כלומר קבל וסליל ריקים) הן $\mathcal{C}_0$ ו $\mathcal{L}_0$ אזי בחומר עם מקדם דיאלקטרי יחסי ε_r ופרמיאבליות יחסית μ_r הקיבול וההשראות ליחידת אורך הן $\mathcal{C}_0\varepsilon_r$ ו $\mathcal{L}_0\mu_r$. מכאן העכבה היא:

$$Z = Z_0 \sqrt{\frac{\mu_r}{\varepsilon_r}}$$

כאשר Z_0 הוא העכבה של הריק וערכה $Z_0 = Z_0 \approx 376.73\Omega$.
אנחנו נתמקד בחומרים דיאלקטריים בלבד, בחומרים אלו $\mu_r = 1$ ולכן:

$$Z = Z_0 \sqrt{\frac{1}{\varepsilon_r}} = \frac{Z_0}{n}$$

כעת נוכל לחשב את מקדמי ההעברה וההחזרה של השדה המגנטי במעבר מתווך עם מקדם שבירה n_1 לתווך עם מקדם שבירה n_2. אנחנו נתמקד רק במקרה בו הגל מגיע במקביל לאנך לחיבור בין התווכים (זווית פגיעה 0):
מקדם ההחזרה:

$$R_B = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{\frac{Z_0}{n_1} - \frac{Z_0}{n_2}}{\frac{Z_0}{n_1} + \frac{Z_0}{n_2}} = \frac{\frac{n_2 - n_1}{n_1 n_2}}{\frac{n_2 + n_1}{n_1 n_2}} = \frac{n_2 - n_1}{n_2 + n_1}$$

ומקדם ההעברה:

$$T_B = 1 + R_B = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\frac{Z_0}{n_1}}{\frac{Z_0}{n_1} + \frac{Z_0}{n_2}} = \frac{2\frac{n_2}{n_1 n_2}}{\frac{n_2 + n_1}{n_1 n_2}} = \frac{2n_2}{n_2 + n_1}$$

כיוון שראינו כי $V \sim -I$ נוכל לומר כי $E \sim -B$ ולכן מקדם ההחזרה $R_E = -R_B$:

$$R_E = \frac{n_1 - n_2}{n_2 + n_1}$$

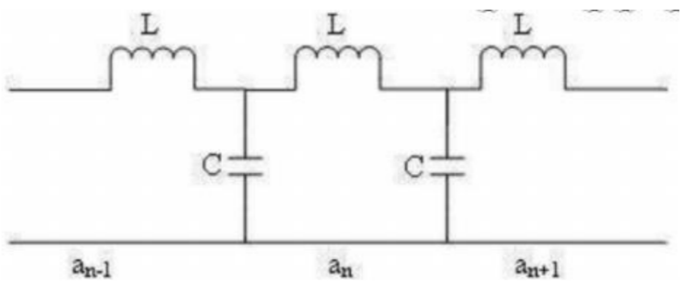
ומקדם ההעברה:

$$T_E = 1 + R_E = \frac{2n_1}{n_2 + n_1}$$

הערה: בדרך כלל כשמדברים על העברה והחזרה של גל אלקטרומגנטי מתכוונים לשדה החשמלי. במבחן ובשאלות בית זה המצב אלא אם צויין במפורש אחרת.
שאלה לדוגמה על העברה והחזרה של אור מצורפת.

קו תמסורת

נתון קו התמסורת הבא

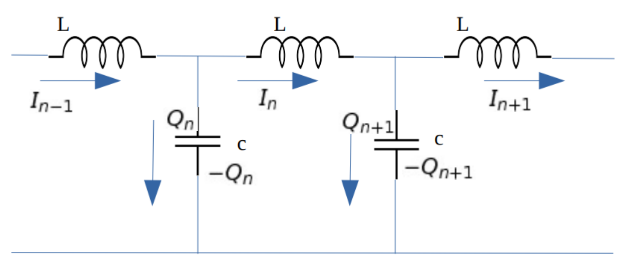


איור 1: קו תמסורת

1. רשום את משוואת הזרמים עבור האלמנט הn, מה קורה בזרם DC?
2. פתח את משוואת הגלים בגבול הרצף
3. מהו יחס הנפיצה?

פתרון

1. בזרם DC לא יווצר שטף משתנה בסלילים ולכן לא יהיה מתח על הסלילים והקו יתנהג כמו מוליך ללא התנגדות.



איור 2:

בזרם חליפין: המתח על הסליל ה n הוא $-L\frac{dI_n}{dt}$. מתח זה זהה להפרש המתחים על הקבלים משני צידי הסליל $\frac{Q_n}{C} - \frac{Q_{n+1}}{C}$(לפי חוק כירכהוף עבור מתח בלולאה סגורה) בנוסף, לפי חוק קירכהוף עבור זרם בצמתים, אנו יודעים כי: $I_{n-1} = \frac{dQ_n}{dt} + I_n$ וכן $I_n = \frac{dQ_{n+1}}{dt} + I_{n+1}$ לכן:

$$\frac{dQ_n}{dt} = I_{n-1} - I_n \qquad \frac{dQ_{n+1}}{dt} = I_n - I_{n+1}$$

נגזור את המשוואה עבור המתחים ונציב את מה שקיבלנו:

$$-L\frac{d^2I_n}{dt^2}=\frac{I_n-I_{n+1}-I_{n-1}+I_n}{C}\Rightarrow$$

$$L\frac{d^2I_n}{dt^2}=\frac{I_{n+1}-2I_n+I_{n-1}}{C}$$

2. כדי לפתח בגבול הרצף נגדיר השראות וקיבול ליחידת אורך $\mathcal{L}=\frac{L}{a}$ $\mathcal{C}=\frac{C}{a}$, נחלק את המשוואה ב a:

$$\mathcal{L}\frac{d^2I_n}{dt^2}=\frac{I_{n+1}-2I_n+I_{n-1}}{Ca}$$

כעת נחלק ונכפיל את אגף ימין ב a:

$$\mathcal{L}\frac{d^2I_n}{dt^2}=\frac{1}{\mathcal{C}}\frac{I_{n+1}-2I_n+I_{n-1}}{a^2}$$

נראה כי בגבול $a\to 0$ אגף ימין הוא הנגזרת השנייה של I לפי x.

$$\frac{dI}{dx}=\lim_{a\to 0}\frac{I(x)-I(x-a)}{a}$$

$$\frac{d^2I}{dx^2}=\lim_{a\to 0}\frac{\frac{dI(x+a)}{da}-\frac{dI(x)}{da}}{a}=\frac{I(x+a)-2I(x)+I(x+a)}{a^2}$$

אם נסמן $I_n(t)=I(x,t)$ כאשר $x=an$ נקבל בגבול $a\to 0$:

$$\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial t^2}=\frac{1}{\mathcal{L}\mathcal{C}}\frac{\partial^2 I(x,t)}{\partial x^2}$$

3. כדי לקבל את יחס הנפיצה נציב פתרון של גל (השתמשתי כאן בגל נע ימינה, גם גל עומד או גל נע שמאלה יעבדו בצורה זהה):

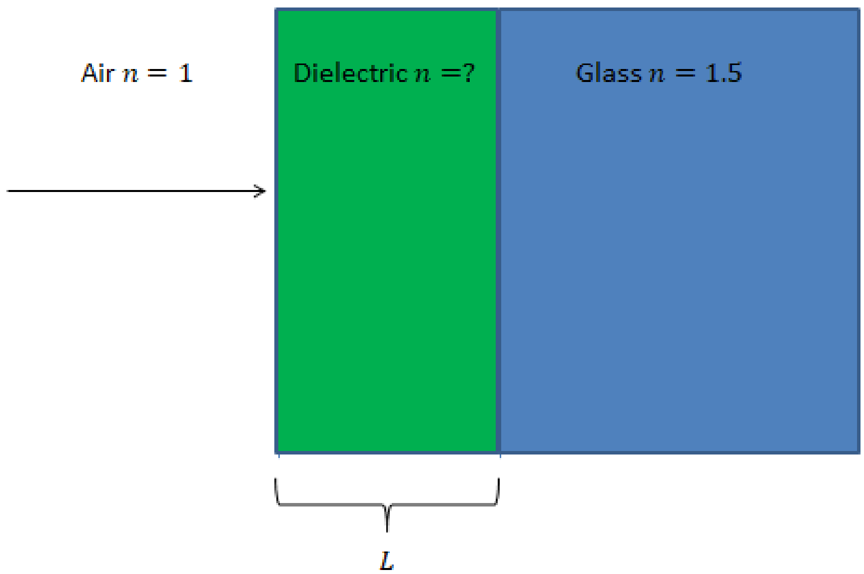
$$I(x,t)=A\cos(\omega t-Kx+\varphi)$$

מהצבה במשוואה נקבל:

$$-\omega^2 A\cos(\omega t - Kx + \varphi) = -\frac{K^2}{\mathcal{LC}} A\cos(\omega t - Kx + \varphi) \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{K}{\sqrt{\mathcal{LC}}}$$

זהו יחס הנפיצה עבור משוואת הגלים שקיבלנו.



איור 1:

מעבר אור בין אוויר וזכוכית

נתון אור מונוכרומטי בעל תדירות זוויתית $f = 6 \cdot 10^{14}$. הגל עובר מאויר $(n = 1)$ לזכוכית $(n = 1.5)$.

א. מהו אחוז האנרגיה המוחזרת מהגבול בין האויר לזכוכית?

כעת בין האויר לזכוכית מוסיפים שכבת חומר דיאלקטרי בעלת רוחב L ומקדם שבירה n.

ב. בהנחת החזרות קטנות $(small\ reflection\ approximation)$ מה צריכים להיות L ו n בכדי שלא תהיה החזרה?

פתרון

א. מקדם ההחזרה עבור הגל (השדה החשמלי) הינו:

$$R = \frac{n_1 - n_2}{n_1 + n_2} = -\frac{0.5}{2.5} = -0.2$$

האנרגיה של השדה החשמלי פרופורציונאלית לריבוע השדה $E_{energy} \propto E_{field}^2$

היחס בין השדה החשמלי הנכנס ליוצא הוא מקדם ההחזרה:

$$\frac{E^{out}_{field}}{E^{in}_{field}} = 0.2$$

ולכן היחס בין האנרגיה הנכנסת לאנרגיה המוחזרת הוא:

$$\frac{E^{out}_{energy}}{E^{in}_{energy}} = \left(\frac{E^{out}_{field}}{E^{in}_{field}}\right)^2 = 0.2^2 = 0.04 = 4\%$$

לכן אחוז האנרגיה המוחזרת הוא 4%.

ב. בהינתן קירוב החזרות קטנות נוכל לחשב את הגל החוזר כשילוב של הגל שמוחזר מהמעבר בין האויר לתווך הדיאלקטרי, באמפליטודה A_{r1} והגל שמוחזר פעם אחת מהגבול בין החומר הדיאלקטרי לזכוכית באמפליטודה A_{r2} (נזניח החזרות משניות, כלומר מקרים שבהם הגל מוחזר כמה פעמים בתוך החומר הדיאלקטרי).

כדי שלא תהיה החזרה נדרוש כי $A_{r1} + A_{r2} = 0$. נסמן את האויר כחומר 1, החומר הדיאלקטרי ב2 והזכוכית ב3. את מקדמי ההעברה וההחזרה מחומר i ל j נסמן T_{ij} ו R_{ij}

את A_{r1} ניתן לחשב ע"י מקדם ההחזרה בין האויר לחומר הדיאלקטרי:

$$A_{r1} = R_{12}A_i$$

$A^2_{r_2}$ היא האמפליטודה של הגל שהועבר מהאויר לחומר הדיאלקטרי← התקדם מרחק L בחומר הדיאלקטרי← הוחזר מהמעבר בין החומר הדיאלקטרי לזכוכית ←התקדם עוד מרחק L בחומר הדיאלקטרי ← ולבסוף הועבר מהחומר הדיאלקטרי לאויר.

אנחנו יודעים מה קורה לאמפליטודה במעבר בין חומרים, אבל מה קורה לה כאשר הגל מתקדם?

לשם כך נשתמש בייצוג המרוכב של גל נע ימינה:

$$Ae^{i(\omega t - Kx)}$$

כאשר הגל מתקדם מרחק L ימינה נקבל:

$$Ae^{i(\omega t - K(x+L))} = Ae^{-iKL}e^{i(\omega t - Kx)}$$

כלומר, האמפליטודה המרוכבת A הוכפלה ב e^{-iKL}.

אותו דבר נקבל עבור גל המתקדם מרחק L שמאלה. עבור החומר הדיאלקטרי $K = \frac{\omega}{v} = \frac{\omega}{c}n$.

לסיכום נקבל כי:

$$A_{r2} = A_i \cdot T_{12} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}nL} \cdot R_{23} \cdot e^{-i\frac{\omega}{c}nL} \cdot T_{21}$$

כעת נראה כי בקירוב שלנו $|R_{21}| \ll 1$ לכן:

$$T_{12}T_{21} = (1+R_{12})(1+R_{21}) = (1-R_{21})(1+R_{21}) = 1 - R_{21}^2 \approx 1$$

ולכן נשאר עם:

$$A_{r2} \approx A_i R_{23} e^{-2i\frac{\omega}{c}nL}$$

נקבל כעת כי התנאי שלא יהיו החזרות הינו:

$$A_i\left(R_{12} + R_{23}e^{-2i\frac{\omega}{c}nL}\right) = 0$$

התנאי הזה יתקיים אם $R_{12} = R_{23}$ ו $e^{-2i\frac{\omega}{c}nL} = -1$. נקבל:

$$R_{12} = R_{23} \Rightarrow \frac{1-n}{1+n} = \frac{n-1.5}{n+1.5} \Rightarrow n + 1.5 - n^2 - 1.5n = n + n^2 - 1.5 - 1.5n \Rightarrow$$

$$n = \sqrt{1.5} \approx 1.22$$

ו

$$e^{-2i\frac{\omega}{c}nL} = -1 \Rightarrow 2\frac{\omega}{c}nL = \pi + 2\pi l \Rightarrow L = \frac{\pi + 2\pi m}{2\frac{2\pi f}{c}} = 2\frac{c}{f}\left(\frac{1}{2} + l\right) =$$

$$2\frac{3 \cdot 10^8}{6 \cdot 10^{14}}\left(\frac{1}{2} + l\right)\ meter = \left(\frac{1}{2} + l\right)\ \mu m$$

כלומר נצטרך חומר דיאלקטרי בעל מקדם שבירה $n = 1.22$ בעובי $L = \left(\frac{1}{2} + l\right)$ מיקרו־מטר, כאשר l מספר שלם חיובי כלשהו.

: