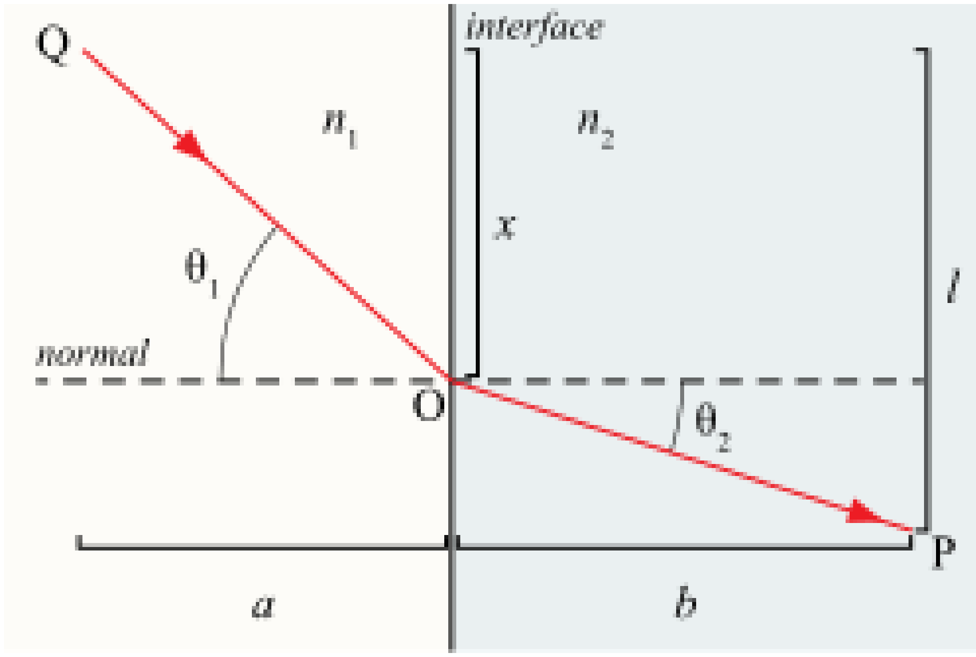

איור 1: חוק סנל, לקוח מויקיפדיה

מהירות האור בחומר

ראיתם בכיתה כי מהירות האור (כלומר מהירות הפאזה של גל אור) אינה זהה בין תווכים שונים ונקבעת לפי המקדם הדיאלקטרי והפרמיאביליות של כל תווך.

עבור חומר עם מקדם דיאלקטרי יחסי ε_r ופרמיאבליות יחסית μ_r נגדיר לנוחות מקדם שבירה $n = \sqrt{\varepsilon_r \mu_r}$.

בכיתה ראיתם כי מהירות האור בחומר זה תהיה: $v = \frac{1}{\sqrt{\mu\epsilon}} = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\varepsilon_0}\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{c}{n}$.

הערה: במשך הרבה זמן לא היה ידוע שאור הוא גל אלקטרו־מגנטי. היה ידוע שקיימים גלים אלקטרו־מגנטיים עם מהירות פאזה (בריק) $\frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$. כאשר גילו שלאור מהירות סופית ושמהירותו היא $c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0\epsilon_0}}$ זה היה גילוי מפתיע שרמז לכך שאור וקרינה אלקטרומגנטית הם אותו דבר.

חוק סנל

חוק סנל מקשר בין זוית הפגיעה וזוית ההעברה של אור במעבר בין שני תווכים שונים (עם מקדמי שבירה שונים).

חוק סנל נובע מ**עקרון פרמה:** אור תמיד ינוע בין שתי נקודות במסלול המהיר ביותר (כלומר המסלול שייקח את הזמן הקצר ביותר).

נביט באיור 1. מהירות האור התווך השמאלי $v_1 = \frac{c}{n_1}$ ובימני $v_2 = \frac{c}{n_2}$. הזמן שלוקח לאור להגיע מנקודה Q ל P:

$$t=\frac{\sqrt{a^2+y^2}}{v_1}+\frac{\sqrt{b^2+(l-y)^2}}{v_2}$$

נמצא את y שגורם לזמן זה להיות מינימלי (נגזור את T לפי y ונשווה ל0):

$$\frac{\partial t}{\partial y}=\frac{1}{v_1}\frac{y}{\sqrt{a^2+y^2}}-\frac{1}{v_2}\frac{l-y}{\sqrt{b^2+(l-y)^2}}=\frac{\sin\theta_1}{v_1}-\frac{\sin\theta_2}{v_2}=\frac{n_1\sin\theta_1-n_2\sin\theta_2}{c}=0$$

קיבלנו כי הדרך הכי קצרה תתקבל עבור:

$$n_1\sin\theta_1=n_2\sin\theta_2$$

זהו חוק סנל.
משוואה זו מדברת על האור המועבר, חלק מהאור מוחזר מהמעבר בין התווכים (בזוית זהה לזוית הפגיעה, כמו מראה).
נשים לב שעבור $n_1>n_2$ אין פתרון עבור θ_2 אם $\frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1>1$. כלומר, עבור זוויות פגיעה $\theta_1>\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ לא תהיה העברה. הזוית $\theta_c=\arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$ היא הזוית הכי גדולה בה עדיין תהיה העברה ונקראת הזוית הקריטית. עבור זוית גדולה יותר לא תהיה העברה והחומר יתנהג כמראה.
דוגמא: סיב אופטי (מצורף).

העברות והחזרות

ראינו בתרגול הקודם כי במעבר גל בין תווכים שונים התדירות לא משתנה. אם מהירות הגל שונה בכל תווך נובע כי מספר הגל חייב להשתנות במעבר הגל.
נניח שיש לנו שני מיתרים עם מתיחויות T_1,T_2 וצפיפויות מסה ρ_1,ρ_2. נסמן את נקודת המעבר ב $x=0$. נניח שיש גל שמגיע משמאל עם תדירות ω. בזמן $t=0$ הגל מגיע למעבר בין המיתרים.
נרצה לדעת כמה מהגל עובר וכמה מוחזר.
ראשית, אנחנו כבר יודעים את יחס הנפיצה במיתר, $K=\sqrt{\frac{\rho}{T}}\omega$. מכאן מספר הגל בצד שמאל $K_1=\sqrt{\frac{\rho_1}{T_1}}\omega$ ובצד ימין $K_2=\sqrt{\frac{\rho_2}{T_2}}\omega$
נשתמש בהצגה מרוכבת:

$$\tilde{A}\cos(\omega t-Kx+\varphi)=Re\left[\tilde{A}e^{i\varphi}e^{i(\omega t-Kx)}\right]=Re\left[Ae^{i(\omega t-Kx)}\right]$$

כאשר $A=\tilde{A}e^{i\varphi}$. זה יאפשר לנו להשתמש במקדם מרוכב A ו"להעלים" את הפאזה. כיוון שכל המשוואות שנעבוד איתן לינאריות, נוכל לעבוד עם ההצגה המרוכבת ובסוף לקחת את החלק הממשי.

נפריד את הגלים בכל תווך לגל שנע ימינה וגל שנע שמאלה.
בתווך השמאלי יש גל שנע ימינה (הגל ההתחלתי) וגל מוחזר שנע שמאלה

$$y_1\left(x,t\right)=A_ie^{i(\omega t-K_1x)}+A_re^{i(\omega t+K_1x)}$$

בתווך הימני יש רק גל שנע ימינה:

$$y_2\left(x,t\right)=A_te^{i(\omega t-K_2x)}$$

את הקשר בין המקדמים נמצא מהדרישה שהפונקציה תהיה רציפה ושהכח יתאפס בנקודת המעבר $x=0$ (נימוק לכך ראיתם בכיתה) נקבל:
מרציפות הגל ב $x=0$:

$$A_i+A_r=A_t \tag{1}$$

ראינו כי הכח שפועל על קצה מיתר הינו $-T\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}|_{on\ the\ edge}$ לכן, סכום הכוחות ב $x=0$:

$$-iT_1K_1A_i+iT_1K_1A_r+iT_2K_2A_t=0\Rightarrow T_1K_1\left(A_i-A_r\right)=T_2K_2A_t$$

נגדיר עכבה $Z=\frac{KT}{\omega}=\sqrt{\rho T}\omega$. זהו הגודל שרלוונטי להחזרות והעברות, נקבל:

$$Z_1\left(A_i-A_r\right)=Z_2A_t \tag{2}$$

נציב את משוואה 1 ב 2:

$$Z_1\left(A_i-A_r\right)=Z_2\left(A_i+A_r\right)\Rightarrow A_i\left(Z_1-Z_2\right)=A_r\left(Z_1+Z_2\right)$$

ונקבל מקדם החזרה:

$$R=\frac{A_r}{A_i}=\frac{Z_1-Z_2}{Z_1+Z_2}$$

ומקדם העברה:

$$T=\frac{B_t}{A_i}=1+\frac{A_r}{A_i}=1+R=\frac{2Z_1}{Z_1+Z_2}$$

דוגמה מיתרים מחוברים בטבעת (מצורפת).

סיב אופטי

סיב אופטי פשוט. גליל דק של חומר דיאלקטרי שקוף בעל מקדם שבירה n_1מצופה במעטפת שקופה בעל מקדם שבירה n_2. אם התווך שמחוץ לגליל הוא נוזל בעל מקדם שבירה n_0, ונתון כי$n_2 < n_0 < n_1$, מהי הזווית המירבית כך שקרן לייזר הפוגעת בציר הגליל כבאיור תישאר כלואה בסיב? הניחו כי קוטר הסיב גדול בהרבה מאורך הגל, כך שניתן לראות את ההחזרה הפנימית ממעטפת הגליל כהחזרה ממישור.

פתרון:

בכדי שלא יהיו העברות בכלל על זוית הפגיעה θ_1 להיות גדולה מהזוית הקריטית עבור מעבר מ n_1 ל n_2:

$$\theta_1 > \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

נשים לב כי כיוון ששני צידי הסיב מקבילים אז כל זוויות הפגיעה זהות ולכן תנאי זה מספיק למעבר האור בכל הסיב, לא משנה כמה החזרות ידרשו לשם כך.
מחוק סנל לגבי מעבר האור מ n_0 ל n_1 (תמיד תהיה העברה כי $n_0 < n_1$) נקבל:

$$n_0 \sin\theta_0 = n_1 \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta_1\right) = n_1 \cos\left(\theta_1\right) \Rightarrow \theta_1 = \arccos\left(\frac{n_0}{n_1}\sin\theta_0\right)$$

ומהתנאי שקיבלנו קודם, הזוית הקריטית תתקבל עבור:

$$\theta_1 = \arccos\left(\frac{n_0}{n_1}\sin\theta_0\right) = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

נשתמש בכך ש:

$$\cos\left(\arcsin x\right) = \sqrt{1 - \sin^2\left(\arcsin x\right)} = \sqrt{1 - x^2}$$

ונקבל:

$$\theta_0 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_0}\sqrt{1 - \left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2}\right)$$

נשים לב כי כאשר θ_0 גדלה θ_1 קטנה, לכן הזוית שמצאנו היא הזוית המירבית שבה הקרן תעבור במלואה בכל הסיב האופטי.

מיתרים מחוברים בטבעת

נתונים שני מיתרים B, A בעלי עכבות $Z, 3Z$ בהתאמה המחוברים על ידי טבעת חסרת מסה בנקודה $x = 0$. גל בעל צורה $\psi_1(x,t) = a\cos(\omega t - k_1 x)$ מגיע לטבעת מכיוון מיתר A גל בעל צורה $\psi_2\left(x,t\right) = an\cos\left(\omega 2 + k_2 x\right)$ מגיע לטבעת מכיוון מיתר B. מהו ערכו של n על מנת שלא ייווצר גל חוזר במיתר A ?

פתרון

מקדם ההחזרה במעבר מתווך עם עכבה Z_1 לתווך עם עכבה Z_2 הינו $R = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$ ומקדם ההעברה $T = 1 + R = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$.

אנחנו רוצים למצוא את הגל הכולל הנע שמאלה במיתר A. הוא מורכב מהגל שהועבר ממיתר B והגל שהוחזר ממיתר A.

$$B_t \cos\left(\omega t + k_1 x\right) + A_r \cos\left(\omega t + k_1 x\right)$$

בכדי שגל זה יתאפס נדרוש:

$$B_t \cos\left(\omega t + k_1 x\right) + A_r \cos\left(\omega t + k_1 x\right) = 0 \Rightarrow B_t + A_r = 0$$

אמפליטודת הגל המועבר ממיתר B:

$$B_t = an\frac{2Z}{Z + 3Z} = \frac{1}{2}an$$

אמפליטודת הגל המוחזר ממיתר A:

$$A_r = a\frac{3Z - Z}{3Z + Z} = \frac{1}{2}a$$

לכן, כדי שהגל המוחזר יתאפס נדרוש $n = -1$.