

גלים במיתר

בכיתה פיתחתם את משוואת הגלים עבור מיתר אחיד. פיתחתם ע"י כתיבת משוואות התנועה עבור מיתר שעשוי ממסות m מחוברות בקפיצים עם קבוע k במרחק a זו מזו (במצב שיווי המשקל). ע"י לקיחת הגבול בו המסות קטנות מאוד וקרובות אחת לשנייה קיבלתם את משוואת הגלים:

$$\rho \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2}$$

כאשר $\rho = \frac{m}{a}$ צפיפות המסה האורכית במיתר (יחידות של קילוגרם למטר) ו $T = ka$ מתוחות המיתר (יחידות של ניוטון).

הפונקצייה y אומרת לנו מהי ההזזה משיווי המשקל של המיתר בנקודה x בזמן t .
 ע"י הצבת ה"ניחוש" בהמשך נראה שזה לא ניחוש כשנלמד על אנליזת פורייה) $y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi)$ גיליתם כי קיים פתרון למשוואה זו שהינו גלים עומדים:

$$y(x, t) = A \cos(Kx + \tilde{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi)$$

הערה: ע"י זימוש בזהות $\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} (\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta))$ ניתן לראות כי

$$y(x, t) = A \cos(Kx + \tilde{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi) = \frac{A}{2} \left(\underbrace{\cos(Kx - \omega t + \varphi_1)}_{\text{traveling to the right}} + \underbrace{\cos(Kx + \omega t + \varphi_2)}_{\text{traveling to the left}} \right)$$

כלומר ניתן לכתוב גל עומד גם כסכום של גל שנע ימינה וגל שנע שמאלה.

כמו כן מצאתם את הקשר בין K ל ω , שנקרא "יחס הדיספרסיה". $\omega = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$, זהו יחס הדיספרסיה במיתר אחיד. בתווכים שונים ייתכנו יחסי דיספרסיה שונים. המהירות שבה הגל נע נקראת "מהירות הפאזה" והיא $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{T}{\rho}}$.

K נקרא מספר הגל והוא נמדד ברדיאנים למטר (בכמה רדיאנים השתנתה הפאזה כשהתקדמנו מטר אחד). $\lambda = \frac{2\pi}{K}$ הוא אורך הגל הוא נמדד במטרים ואומר לנו מהו המרחק בין שתי נקודות בעלות פאזה זהה, למשל המרחק בין שני שיאים של הגל (דומה לזמן מחזור אבל מודד מרחק ולא זמן).

לא כל K אפשרי במיתר. את מספרי הגל האפשריים נמצא לפי תנאי השפה, שיגידו לנו מה מצב המיתר בקצה שלו. תנאי שפה נפוצים הם:

תנאי שפה סגור - בתנאי שפה זה המיתר קשור בקצה שלו, כלומר, אם קצה החוט נמצא ב $x = L$ אז $y(x = L, t) = 0$.

תנאי שפה פתוח - בתנאי שפה זה המיתר משוחרר בקצה שלו, כלומר בקצה פועל עליו כח רק מצד אחד. בכיתה ראיתם שהכח על הקצה הינו $-T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} |_{x=L}$ ולכן בקצה

נקבל $m \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial t^2} |_{x=L} = -T \frac{\partial y(x, t)}{\partial x} |_{x=L}$ וכיוון שבקירוב שעשיתם בכיתה במעבר לרצף $m = a\rho \rightarrow 0$ אז תנאי שפה פתוח יאמר לנו כי $\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} |_{x=L} = 0$.

דוגמה - מבחן מועד א 2016

דוגמה - גלי קול וכינור

פתרונות לדוגמאות מצורפים בהמשך

שאלה 2 א ממבחן פיסיקה 3ב 2016 מועד א

אורכו של מיתר הקשור בשתי קצותיו L . צפיפותו האורכית ρ ומתיחותו T . מצא את הביטוי המתמטי עבור מספרי הגל המותרים. מצא את התדרים המותרים. באילו יחידות עליך לכתוב את כל הפרמטרים?

פתרון

משוואת הגלים במיתר $\rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, מהצבת פתרון של גל עומד במשוואה $y(x, t) = A(x) \cos(\omega t + \varphi)$ נקבל:

$$-\omega^2 \rho A(x) = T \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}$$

שפתרונה:

$$A(x) = A \cos(Kx + \tilde{\varphi})$$

כאשר $K = \sqrt{\frac{\rho}{T}} \omega$ ו- $\tilde{\varphi}$ ו- A קבועים.
כלומר הפתרון שקיבלנו למשוואת הגלים הינו:

$$y(x, t) = A \cos(Kx + \tilde{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi)$$

כיוון שהמיתר קשור בשתי קצותיו, יש לנו תנאי שפה $y(x=0, t) = y(x=L, t) = 0$
כיוון שתנאי השפה צריכים להתקיים בכל זמן t כדי שתנאי השפה יתקיימו נצטרך ש:

$$A \cos(\tilde{\varphi}) = 0$$

$$A \cos(KL + \tilde{\varphi}) = 0$$

הפתרון $A = 0$ נקרא הפתרון ה"טריוויאלי" וייתן לנו מיתר עומד ללא גלים. שהו פצרון נכון אבל אנחנו בדרך כלל לא מתעניינים בו. פתרונות נוספים למשוואה הראשונה יהיו $\tilde{\varphi} = \pm \frac{\pi}{2}$ שייטנו לנו לאחר הצבה במשוואה השנייה:

$$A \cos\left(KL \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm A \sin(KL) = 0$$

לכן:

$$KL = \pi n$$

כאשר n מספר שלם.
כלומר, מספרי הגל המותרים הם

$$K_n = \frac{\pi n}{L}$$

כעת אנחנו יודעים גם מהן התדירויות הזוויתיות המותרות:

$$\omega_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}} K_n = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{\pi n}{L}$$

מה הם התדרים המותרים:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{n}{2L}$$

ומה הם אורכי הגל המותרים:

$$\lambda_n = \frac{2\pi}{K_n} = \frac{2L}{n}$$

היחידות של הפרמטרים השונים:

$$[\rho] = \frac{kg}{m}, [T] = N = \frac{kg \cdot m}{s^2}, [L] = m, [\omega] = \frac{1}{s}$$

$$[K] = \frac{1}{m}, [f] = \frac{1}{s}, [\lambda] = m$$

גלי קול בכינור

מיתר כינור באורך 30 ס"מ עם צפיפות אורכית 0.65 גרם למטר נמצא ליד רמקול המניע אותו ע"י גלי קול. התדירויות היחידות שהוא מצליח לקלוט מהרמקול כתנודות הן 880 ו 1320 הרץ. טווח התדרים הכולל של הרמקול הוא 500 – 1500 הרץ.

- (א) מהי מתיחות המיתר?
(ב) מהו טווח אורכי הגל שהרמקול משדר?
(ג) מהם אורכי הגל והתדרים האופייניים במיתר?

פתרון

(א)

מיתר כינור הוא מיתר שמוחזק בשתי קצותיו. התנודות במיתר מקיימות את משוואת הגלים:

$$-\omega^2 \rho A(x) = T \frac{\partial^2 A(x)}{\partial x^2}$$

שפתרונותיה הם גלים עומדים:

$$y(x, t) = A \cos(Kx + \bar{\varphi}) \cos(\omega t + \varphi)$$

כאשר $K = \sqrt{\frac{\rho}{T}} \omega$

נסמן את אורך המיתר ב L . תנאי השפה שלנו הם $y(x=0, t) = y(x=L, t) = 0$ מהצבת תנאי השפה נקבל את מספרי הגל המותרים:

$$K_n = \frac{\pi n}{L}$$

ואת התדרים המותרים:

$$f_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{n}{2L}$$

נתון לנו שהתדרים אותם המיתר מצליח לקלוט כתנודות הם 880 ו 1320 הרץ. כלומר, קיימים שני מספרים שלמים ועוקבים i, j שמקיימים:

$$\sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{i}{2L} = 880Hz, \sqrt{\frac{T}{\rho}} \frac{j}{2L} = 1320Hz$$

נציב את הנתונים שיש לנו:

$$\sqrt{\frac{T}{0.65 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m}}} \frac{i}{2 \cdot 30 \cdot 10^{-2} m} = 880 \frac{1}{s} \Rightarrow i^2 T \approx 181.2 N$$

$$\sqrt{\frac{T}{0.65 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m}}} \frac{j}{2 \cdot 30 \cdot 10^{-2} m} = 1320 \frac{1}{s} \Rightarrow j^2 T \approx 407.7 N$$

כלומר:

$$\frac{i}{j} = \sqrt{\frac{181.2}{407.7}} = \frac{2}{3}$$

כלומר $i = 2, j = 3$ ולכן המתיחות במיתר $T = 45.3 N$ (ב)

נתון לנו טווח התדרים שבו הרמקול משדר: $500 - 1500$ הרץ. אנחנו יודעים כי מהירות הפאזה, שבמקרה זה היא מהירות הקול, הינה $v_s = \frac{\omega_s}{K_s} = 343 \frac{m}{s}$ מכאן נוכל לקבל את אורכי הגל המתאימים:

$$\lambda_s = \frac{2\pi}{K_s} = \frac{2\pi}{\omega_s} v_s = \frac{v_s}{f_s}$$

עבור 500 הרץ נקבל אורך גל 68.6 סנטימטר ועבור 1500 הרץ 22.9 סנטימטר. כלומר טווח אורכי הגל $22.9 - 68.6$ סנטימטר. (ג)

את אורכי הגל והתדרים האופייניים במיתר כבר מצאנו בסעיף א, נותר רק להציב את המתיחות שקיבלנו:

$$K_n = \frac{\pi n}{L} = 10.47 n \frac{1}{m}$$

$$f_n = \sqrt{\frac{T}{\rho} \frac{n}{2L}} = \sqrt{\frac{45.3 N}{0.65 \cdot 10^{-3} \frac{kg}{m}}} \frac{n}{2 \cdot 30 \cdot 10^{-2} m} \approx 440 n Hz$$

הערה: זהו התדר של התו לה. כלומר זהו המיתר לה (או כמו שבדרך כלל מסומן בגיטרות A) של הכינור.