תנודות במערכת עם שתי דרגות חופש

נתונה מערכת בעלת שתי דרגות חופש x, y (שני חלקיקים בחד מימד, חלקיק שיכול לנוע בשני כיוונים שונים וכו'). נכתוב את משוואות התנועה עבור שתי דרגות החופש:

$$\ddot{x} = \frac{f_x\left(x, y\right)}{m_x}$$

$$\ddot{y} = \frac{f_y\left(x, y\right)}{m_y}$$

למערכת נקודת ש"מ יציבה $x_0 y_0$. נפתח סביב ש"מ לסדר ראשון בטור טיילור:

$$f_x\left(x, y\right) \approx \underbrace{f_x\left(x_0, y_0\right)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial f_x\left(x, y\right)}{\partial x}|_{x_0, y_0}}_{-K_{x1}}\left(x - x_0\right) + \underbrace{\frac{\partial f_x\left(x, y\right)}{\partial y}|_{x_0, y_0}}_{-K_{x2}}\left(y - y_0\right)$$

$$f_y\left(x, y\right) \approx \underbrace{f_y\left(x_0, y_0\right)}_{0} + \underbrace{\frac{\partial f_y\left(x, y\right)}{\partial x}|_{x_0, y_0}}_{-K_{y1}}\left(x - x_0\right) + \underbrace{\frac{\partial f_y\left(x, y\right)}{\partial y}|_{x_0, y_0}}_{-K_{y2}}\left(y - y_0\right)$$

ונרשום את משוואות התנועה ביחס לנקודת ש"מ: $\Delta x = x - x_0 \ , \ \Delta y = y - y_0$:

$$\ddot{\Delta x} = -\left(\frac{K_{x1}}{m_x}\Delta x + \frac{K_{x2}}{m_x}\Delta y\right)$$

$$\ddot{\Delta y} = -\left(\frac{K_{y1}}{m_y}\Delta x + \frac{K_{y2}}{m_y}\Delta y\right)$$

נרשום את המשוואות בצורה וקטורית $\vec{x} = \begin{pmatrix} \Delta x \\ \Delta y \end{pmatrix} \ , \ J = \begin{pmatrix} \frac{K_{x1}}{m_x} & \frac{K_{x2}}{m_x} \\ \frac{K_{y1}}{m_y} & \frac{K_{y2}}{m_y} \end{pmatrix}$:

$$\ddot{\vec{x}} = -J\vec{x}$$

כעת נלכסן את J ונסמן את הערכים העצמיים שלה ω_1^2, ω_2^2 ואת הוקטורים העצמיים המתאימים $\vec{v}_1, \vec{v}_2$ונוכל לרשום:

$$\ddot{\vec{x}} = -P\tilde{J}P^{-1}\vec{x}$$

כאשר $P = \begin{pmatrix}\vec{v}_1 & \vec{v}_2\end{pmatrix}$ ו $\tilde{J} = \begin{pmatrix}\omega_1^2 & 0 \\ 0 & \omega_2^2\end{pmatrix}$. נכפיל משמאל ב P^{-1} ונגדיר $\vec{x}' = P^{-1}\vec{x}$ ונקבל:

$$P^{-1}\ddot{\vec{x}} = -\tilde{J}P^{-1}\vec{x} \Rightarrow \ddot{\vec{x}}' = -\tilde{J}\vec{x}'$$

בחזרה לכתיב לא מטריציוני:

$$\Delta\ddot{x}_1' = -\omega_1^2\Delta x_1'$$

$$\Delta\ddot{x}_2' = -\omega_2^2\Delta x_2'$$

שפתרונן:

$$\Delta x_1' = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$$

$$\Delta x_2' = A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$$

הערה: אם $\omega^2 = 0$ נקבל פתרון שונה: $\Delta x = At + B$, (ראה תרגיל לדוגמה 1).
נוכל כעת לחזור למשתנים המקוריים ע"י $\begin{pmatrix}x \\ y\end{pmatrix} = P\begin{pmatrix}\Delta x_1' \\ \Delta x_2'\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}x_0 \\ y_0\end{pmatrix}$ ולקבל:

$$\begin{pmatrix}x_1 \\ x_2\end{pmatrix} = \Delta x_1'\vec{v}_1 + \Delta x_2'\vec{v}_2 + \begin{pmatrix}x_0 \\ y_0\end{pmatrix} = A_1\cos(\omega_1 t + \varphi_1)\vec{v}_1 + A_2\cos(\omega_2 t + \varphi_2)\vec{v}_2 + \begin{pmatrix}x_0 \\ y_0\end{pmatrix}$$

ω_1, ω_2 נקראים "התדרים העצמיים של המערכת" ו $\vec{v_1}, \vec{v_2}$ אופני התנודה העצמיים. אם תנאי ההתחלה יגרמו למערכת לנוע באופן תנודה יחיד (כלומר $A_1 = 0$ או $A_2 = 0$) יהיה תדר בודד במערכת. אחרת הפתרון יערבב את שני התדרים. לאופני התנודה העצמיים קוראים לפעמים גם המודים של המערכת.

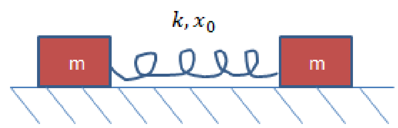
2 מסות על משטח חלק

נתונים שני גופים מלבניים בעלי גודל שווה ומסות זהות m. הם מחוברים ביניהם בקפיץ בעל קבוע k ואורך מנוחה x_0 ומונחים על משטח חלק (ללא חיכוך) ואינסופי. הגופים מוגבלים לנוע בכיוון ציר x בלבד.

א. כתוב את משוואות התנועה עבור כל גוף.

ב. מה הן התדירויות העצמיות ואופני התנודה העצמיים של המערכת?

ג. מחזיקים את הגוף השמאלי במיקום $x = 0$ ואת הגוף הימני מרחיקים למרחק $x_0 + d$ מהגוף השמאלי. בזמן $t = 0$ עוזבים את שני הגופים. מהו מיקום כל גוף כפונקצייה של הזמן?



איור 1: מסות על משטח חלק

פתרון

א.

נסמן את מיקום הגוף השמאלי x_1 ואת מיקום הגוף הימני x_2. הכוחות הפועלים על הגוף השמאלי (בכיוון ציר x):

$$f_1 = k\left(x_2 - x_1 - x_0\right)$$

ועל הגוף הימני:

$$f_2 = -k\left(x_2 - x_1 - x_0\right)$$

בכדי לעבוד בקואורדינאטות יחסיות לנקודת ש"מ, עבורה $x_{1eq} - x_{2eq} = x_0$ נגדיר $\Delta x_1 = x_1 \ , \ \Delta x_2 = x_2 - x_0$.

נקבל את משוואות התנועה:

$$m\ddot{\Delta x}_1 = k\left(\Delta x_2 - \Delta x_1\right)$$

$$m\ddot{\Delta x}_2 = -k\left(\Delta x_2 - \Delta x_1\right)$$

ב.
נכתוב את משוואות התנועה בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix} \ddot{\Delta x_1} \\ \ddot{\Delta x_2} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \Delta x_2 \end{pmatrix}$$

נלכסן את המטריצה:
הפולינום האופייני:

$$\left(\frac{k}{m} - \omega^2\right)^2 - \left(\frac{k}{m}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{k}{m} - \omega^2 = \pm\frac{k}{m} \Rightarrow \omega^2 = 0, 2\frac{k}{m}$$

כלומר, התדרים העצמיים של המערכת:

$$\omega_1 = 0 \ , \ \omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$$

אופני התנודה הם הוקטורים העצמיים של המטריצה, $\vec{v}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$ הם פותרים את המשוואה:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} - \omega_i^2 & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} - \omega_i^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix} = \vec{0}$$

עבור $\omega_1 = 0$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} \frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & \frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow y_1 = x_1$$

נבחר כוקטור עצמי $\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
עבור $\omega_2 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ נקבל:

$$\begin{pmatrix} -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \\ -\frac{k}{m} & -\frac{k}{m} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \vec{0} \Rightarrow y_1 = -x_1$$

נבחר כוקטור עצמי $\vec{v}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

נגדיר כעת $\begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 1\end{pmatrix}\frac{1}{2} = \begin{pmatrix}\Delta x_1\\ \Delta x_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 1\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix}\Delta x_1'\\ \Delta x_2'\end{pmatrix}$ כלומר $\Delta x_1' = \frac{\Delta x_1+\Delta x_2}{2}\ ,\ \Delta x_1' = \frac{\Delta x_1-\Delta x_2}{2}$ ונקבל את המשוואות המלוכסנות:

$$\Delta \ddot{x}_1{}' = 0$$

$$\Delta \ddot{x}_2' = -\omega_2 \Delta x_2'$$

שפתרונן:

$$\Delta x_1' = At + B$$

$$\Delta x_2' = C\cos\left(\omega_2 t + \varphi\right)$$

נחזור למשתנים המקוריים $x_1 = \Delta x_1' + \Delta x_2',\ ,x_2 = \Delta x_1' - \Delta x_2' + x_0$ ביחס לנקודת שיווי המשקל:

$$x_1 = At + B + C\cos\left(\omega_2 t + \varphi\right)$$

$$x_2 = At + B - C\cos\left(\omega_2 t + \varphi\right) + x_0$$

ג.

תנאי ההתחלה:

$$x_1\left(t=0\right) = 0\ ,\ \dot{x}_1\left(t=0\right) = 0$$

$$x_2\left(t=0\right) = x_0 + d\ ,\ \dot{x}_2\left(t=0\right) = 0$$

נציב במשוואות למציאת A, B, C, φ:

$$B + C\cos(\varphi) = 0 \tag{1}$$

$$\omega_2 C \sin(\varphi) = A \tag{2}$$

$$B - C\cos(\varphi) = 2d \tag{3}$$

$$\omega_2 C \sin(\varphi) = -A \tag{4}$$

ממשוואות $2,4$ נקבל $A = 0$ ו $\varphi = 0, \pi$ או $C = 0$. נציב בסכום ובהפרש של משוואות $1,3$ ונקבל:

$$B = d$$

$$C\cos(\varphi) = -d$$

כלומר הפתרון $C = 0$ לא תקף והפתרון הוא $\varphi = 0, C = -d$ (או $\varphi = \pi$ ו $C = d$ שהוא בעצם אותו פתרון).
המיקומים כפונקצייה של הזמן הם אם כך:

$$x_1 = d\left(1 - \cos(\omega_2 t)\right)$$

$$x_2 = d\left(1 + \cos(\omega_2 t)\right) + x_0$$

מטוטלת כפולה

שתי מסות שוות תלויות בקצות מוטות קשיחים זהים חסרי מסה באורך l כל אחד. המוט התחתון יכול להסתובב ללא חיכוך סביב המסה העליונה. תנועת המוטות היא רק במישור הדף. נסמן ב θ_1 ו θ_2את הסטיה של המוט העליון והמוט התחתון מהאנך, בהתאמה.

1. מהם התדירויות העצמיות ואופני התנודה של המערכת בהנחה של תנודות קטנות?
2. מתחילים מהמצב שבו $\theta_1 = \theta_2$(המוטות בקו ישר הסוטה מהאנך). האם המוטות ימשיכו לנוע בקו ישר? אם לא, מתי יגיעו למצב $\theta_1 = -\theta_2$?

פתרון

א.

משוואת הכוחות בצירים x, y תתן לנו:

עבור המסה העליונה:

$$m\ddot{x}_1 = -T_1 \sin\theta_1 + T_2 \sin\theta_2$$

$$m\ddot{y}_1 = T_1 \cos\theta_1 - T_2 \cos\theta_2 - mg$$

עבוד המסה התחתונה:

$$m\ddot{x}_2 = -T_2 \sin\theta_2 \tag{1}$$

$$m\ddot{y}_2 = T_2 \cos\theta_2 - mg \tag{2}$$

נבודד את $T_2 \sin\theta_2$ ואת $T_2 \cos\theta_2$ מהמשוואות עבור המסה התחתונה ונציב במשוואות עבור המסה העליונה:

$$m\left(\ddot{x}_1 + \ddot{x}_2\right) = -T_1 \sin\theta_1 \tag{3}$$

$$m\left(\ddot{y}_1 + \ddot{y}_2\right) = T_1 \cos\theta_1 - 2mg \tag{4}$$

נכפיל את משוואה 1 ב $\cos\theta_2$ ואת משוואה 2 ב $\sin\theta_2$ ונחבר:

$$\cos\theta_2\ddot{x}_2 + \sin\theta_2\ddot{y}_2 = -g\sin\theta_2 \tag{5}$$

נכפיל את משוואה 3 ב $\cos\theta_1$ ואת משוואה 4 ב $\sin\theta_1$ ונחבר:

$$\cos\theta_1\ddot{x_1} + \cos\theta_1\ddot{x}_2 + \sin\theta_1\ddot{y}_1 + \sin\theta_1\ddot{y}_2 = -2g\sin\theta_1 \tag{6}$$

כעת נביע את x_1, x_2, y_1, y_2 בעזרת θ_1, θ_2:

$$x_1 = l\sin\theta_1 \Rightarrow \dot{x_1} = l\cos\theta_1\dot{\theta}_1 \Rightarrow \ddot{x}_1 = -l\sin\theta_1\left(\dot{\theta}_1\right)^2 + l\cos\theta_1\ddot{\theta}_1$$

$$y_1 = -l\cos\theta_1 \Rightarrow \dot{y}_1 = l\sin\theta_1\dot{\theta}_1 \Rightarrow \ddot{y}_1 = l\cos\theta_1\left(\dot{\theta}_1\right)^2 + l\sin\theta_1\ddot{\theta}_1$$

$$x_2 = x_1 + l\sin\theta_1 \Rightarrow \dot{x_2} = \dot{x}_1 + l\cos\theta_2\dot{\theta}_2 \Rightarrow \ddot{x}_2 = \ddot{x}_1 - l\sin\theta_2\left(\dot{\theta}_2\right)^2 + l\cos\theta_1\ddot{\theta}_2$$

$$y_2 = y_1 + -l\cos\theta_2 \Rightarrow \dot{y}_2 = \dot{y}_1 + l\sin\theta_2\dot{\theta}_2 \Rightarrow \ddot{y}_2 = \ddot{y}_1 + l\cos\theta_2\left(\dot{\theta}_2\right)^2 + l\sin\theta_2\ddot{\theta}_2$$

לכן:

$$\cos\theta_1\ddot{x}_1 + \sin\theta_1\ddot{y}_1 = l\ddot{\theta}_1$$

$$\cos\theta_1\ddot{x}_2 + \sin\theta_1\ddot{y}_2 = l\ddot{\theta}_1 + l\left(\dot{\theta}_2\right)^2\underbrace{(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_2)}_{\sin(\theta_1-\theta_2)} + l\ddot{\theta}_2\underbrace{(\sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_2\cos\theta_2)}_{\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

$$\cos\theta_2\ddot{x}_2 + \sin\theta_2\ddot{y}_2 = l\ddot{\theta}_2 + l\left(\dot{\theta}_1\right)^2\underbrace{(\sin\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_2\cos\theta_2)}_{\sin(\theta_1-\theta_2)} + l\ddot{\theta}_1\underbrace{(\sin\theta_1\sin\theta_2 - \cos\theta_2\cos\theta_2)}_{\cos(\theta_1-\theta_2)}$$

נציב במשוואות 5 ו 6 ונקבל:

$$l\ddot{\theta}_2 + l\left(\dot{\theta}_1\right)^2 \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right) + l\ddot{\theta}_1 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) = -g\sin\theta_2$$

$$l\ddot{\theta}_1 + l\ddot{\theta}_1 + l\left(\dot{\theta}_2\right)^2 \sin\left(\theta_1 - \theta_2\right) + l\ddot{\theta}_2 \cos\left(\theta_1 - \theta_2\right) = -2g\sin\theta_1$$

כעת נעבוד בקירוב של זוויות קטנות $\cos\theta \approx 1$, $\sin\theta \approx \theta$ ומהירויות זוויתיות זניחות $\left(\dot{\theta}\right)^2 = 0$ (כיוון שאנחנו מפתחים לסדר ראשון בטור טיילור ופה יש סדר שני).
נקבל:

$$\ddot{\theta}_2 + \ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}\theta_2$$

$$2\ddot{\theta}_1 + \ddot{\theta}_2 = -\frac{2g}{l}\theta_1$$

נחסר משוואה ראשונה משנייה:

$$\ddot{\theta}_1 = -\frac{g}{l}\left(2\theta_1 - \theta_2\right)$$

נכפיל משוואה ראשונה ב2 ונחסיר ממנה את השנייה:

$$\ddot{\theta}_2 = -\frac{g}{l}\left(2\theta_2 - 2\theta_1\right)$$

כעת נוכל לכתוב בצורה מטריציונית:

$$\begin{pmatrix}\ddot{\theta}_1\\ \ddot{\theta}_2\end{pmatrix} = -\underbrace{\frac{g}{l}\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}}_{J}\begin{pmatrix}\theta_1\\ \theta_2\end{pmatrix}$$

למציאת התדרים והאופנים העצמיים נלכסן את המטריצה $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -2 & 2\end{pmatrix}$, הערכים העצמיים הינם:

$$\lambda_{\pm} = 2 \pm \sqrt{2}$$

ולכן התדרים העצמיים:

$$\omega_{\pm} = \sqrt{\frac{g}{l}\lambda_{\pm}} = \sqrt{\frac{g}{l}\left(2 \pm \sqrt{2}\right)}$$

אופני התנודה:

$$\vec{v}_+ = \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \ , \ \vec{v}_- = \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ולכן הפתרון הכללי:

$$\begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{pmatrix} = A\cos\left(\omega_+ t + \varphi_1\right)\begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} + B\cos\left(\omega_- t + \varphi_2\right)\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

ב.

תנאי ההתחלה $\theta_1\left(t=0\right) = \theta_2\left(t=0\right) = \theta_0 \ , \ \dot{\theta}_1\left(t=0\right) = \dot{\theta}_2\left(t=0\right) = 0$, נציב זאת עבור הפתרון שמצאנו:

$$A\cos\varphi_1 + B\cos\varphi_2 = \theta_0 \tag{7}$$

$$-\sqrt{2}A\cos\varphi_1 + \sqrt{2}\cos\varphi_2 = \theta_0 \tag{8}$$

$$-\omega_+ A\sin\varphi_1 - \omega_- B\sin\varphi_2 = 0 \tag{9}$$

$$\sqrt{2}\omega_+ A\sin\varphi_1 - \sqrt{2}\omega_- B\sin\varphi_2 = 0 \tag{10}$$

ע"י חיבור וחיסור משוואות 9 ו 10 נקבל $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$. נציב במשוואות 7 ו 8:

$$A + B = \theta_0$$

$$-A + B = \frac{\theta_0}{\sqrt{2}}$$

נחבר ונחסר:

$$B = \theta_0 \left(\frac{1 + \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \right) = \theta_0 \left(\frac{\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{2}} \right)$$

$$A = \theta_0 \left(\frac{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}}{2} \right) = \theta_0 \left(\frac{\sqrt{2} - 1}{2\sqrt{2}} \right)$$

לבסוף נקבל את הפתרון עבור θ_1 ו θ_2

$$\theta_1 = \frac{\theta_0}{2\sqrt{2}} \left(\left(\sqrt{2} - 1 \right) \cos\left(\omega_+ t\right) + \left(\sqrt{2} + 1 \right) \cos\left(\omega_- t\right) \right)$$

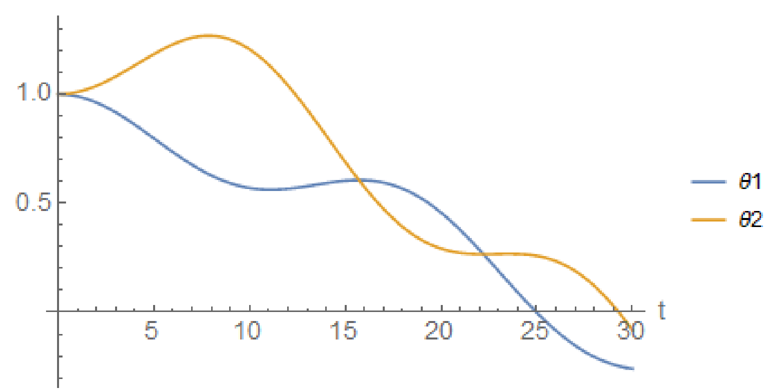
$$\theta_2 = \frac{\theta_0}{2\sqrt{2}} \left(-\sqrt{2} \left(\sqrt{2} - 1 \right) \cos\left(\omega_+ t\right) + \sqrt{2} \left(\sqrt{2} + 1 \right) \cos\left(\omega_- t\right) \right)$$

אנחנו מחפשים את הזמן t עבורו $\theta_1 = -\theta_2$:

$$\left(\sqrt{2} - 1 \right) \cos\left(\omega_+ t\right) + \left(\sqrt{2} + 1 \right) \cos\left(\omega_- t\right) = \sqrt{2} \left(\sqrt{2} - 1 \right) \cos\left(\omega_+ t\right) - \sqrt{2} \left(\sqrt{2} + 1 \right) \cos\left(\omega_- t\right)$$

$$\left(1 + \sqrt{2} \right)^2 \cos\left(\omega_- t\right) = \left(\sqrt{2} - 1 \right)^2 \cos\left(\omega_+ t\right)$$

משוואה זו ניתן לפתור נומרית, למשל עבור $l = 1m, g = 10\frac{m}{s^2}$ נקבל $t \approx 27.3153\ s$,
ניתן גם לצייר גרף של הזוויות (ראה איור 1)



איור 1: θ_1, θ_2 עבור $g = 10\frac{m}{s^2}, l = 1m$