1 תנודות במערכות עם דרגת חופש אחת

1.1 מבוא

תנודות היא תכונה של מערכות פיסיקאליות רבות ושונות, קפיצים, מטוטלות וגם אטומים במולקולה (ככה המיקרו מחמם אוכל, הוא מנדנד את האטומים של המים). כאשר התנודות קטנות, כל המערכות הללו נעות בצורה של גל הרמוני (סינוס או קוסינוס). מניין נובעת ההתנהגות האוניברסלית הזו?

נניח שיש לנו מערכת עם דרגת חופש אחת, שנסמן ב x. במערכת פועל כח שתלוי ב x: $f(x)$ וכמו כן למערכת נקודת שיווי משקל יציבה x_0. כלומר הכח מתאפס ב x_0, $f(x_0)=0$ וכן הזזה קטנה מx_0 הכח יפעל להחזיר את המערכת לx_0.

נרשום את משוואת התנועה (חוק שני של ניוטון)

$$m\ddot{x}=f(x)$$

בקירוב של תנועה קטנה, $|x-x_0|\ll 1$ נוכל לפתח את f לטור טיילור מסדר ראשון סביב x_0. נסמן $x-x_0=\Delta x$, $f'(x_0)=-K$ ונקבל:

$$f(x)\approx\underbrace{f(x_0)}_{=0}+f'(x_0)(x-x_0)=-K\Delta x$$

כאשר K מספר חיובי שכן הנגזרת הראשונה של הכח שלילית (כח מחזיר).

כיוון ש $\ddot{x}=(x-x_0)\ddot{}=\ddot{\Delta x}$ נקבל משוואת תנועה עבור Δx:

$$m\ddot{\Delta x}=-K\Delta x$$

שאת פתרונה אנחנו כבר מכירים מהשיעור:

$$x=A_1\cos(\omega t)+A_2\sin(\omega t)=A\cos(\omega t+\varphi)$$

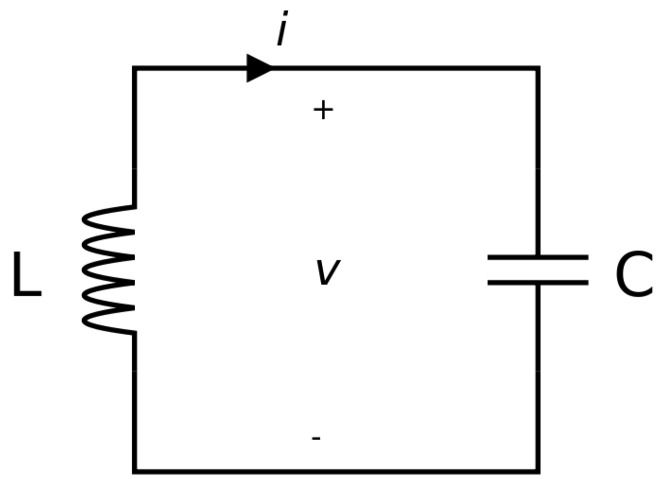
כאשר הגדרנו $\omega=\sqrt{\frac{K}{m}}$. ω נקראת התדירות הזוויתית של המערכת, כלומר כמה בכמה רדיאנים הפאזה משתנה כל יח' זמן. $f=\frac{\omega}{2\pi}$ היא תדירות המערכת, כמה מחזורים המערכת עושה ביח' זמן ו $T=\frac{1}{f}$ זמן המחזור.

את הקבועים A_1,A_2 או A,φ נוכל למצוא בהנתן תנאי התחלה ($\Delta x(t=0)$ ו $\dot{\Delta x}(t=0)$).

כלומר, **כל מערכת עם דרגת חופש אחת שלה נקודת שיווי משקל יציבה תתנדנד בתנודות הרמוניות כתוצאה מהזזה קטנה מנקודת שיווי המשקל.**

1.2 מעגל LC

מעגל LC הוא דוגמה למערכת שמתנדנדת בתנודות הרמוניות. המעגל כולל קבל עם קיבול C וסליל ארוך מאוד(שנקרא גם משרן או סולונואיד) בעל השראות עצמית (נסביר מיד) L שמחוברים בטור (ראה איור 1).



איור 1: מעגל LC

בגלל שהרכיבים מחוברים בטור הזרם על כל רכיב, I זהה.
כמו כן מחוקי קירכהוף אנחנו יודעים ש $V_L = V_C$.
את המתח על קבל אנחנו יודעים:

$$V_c = \frac{Q}{C}$$

מהו המתח על הסליל?
נזכר כי השדה המגנטי שנוצר בסליל שזורם בו זרם הינו $B = \mu_0 nI$ כאשר μ_0 הינו הפרמיאבליות של הריק ($\mu_0 \approx 1.256\frac{N}{A^2}$) ו n הינו מספר הליפופים ליחידת אורך של הסליל.
השטף המגנטי דרך חתך של הסליל הינו השדה כפול שטח החתך של הסלייל: $\phi_B = \pi R^2 \mu_0 nI = LI$, כאשר L נקרא ה"השראות העצמית" של הסליל, הוא נמדד ביחידות שנקראות $Henry = \frac{J}{A^2}$.
אם הזרם דרך הסליל משתנה בזמן אז חוק פאראדיי אומר לנו שבסליל יווצר מתח (שנקרא גם כא"מ):

$$V_L = -\frac{d\phi_B}{dt} = -L\dot{I}$$

כעת נוכל לקבל את משוואת התנועה:

$$\frac{Q}{C} = -L\dot{I}$$

כיוון ש $\dot{Q} = I$ נקבל משוואה עבור Q:

$$\frac{Q}{C} = -L\ddot{Q} \Rightarrow \ddot{Q} = -\frac{1}{LC}Q$$

או לחילופין את אותה משוואה עבור I:

$$\frac{I}{C} = -L\ddot{I} \Rightarrow -\frac{1}{LC}I$$

את הפתרון למשוואה זו אנחנו יודעים:

$$Q\left(t\right) = A\cos\left(\omega t + \varphi\right)\ ,\ \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

נוודא של ω יש אכן יחידות של תדירות:

$$[\omega] = \frac{1}{\sqrt{H \cdot F}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{J}{A^2} \cdot \frac{C^2}{Nm}}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{Nms^2}{C^2} \cdot \frac{C^2}{Nm}}} = \frac{1}{s}$$

דוגמה־ תרגיל 1, פתרון מצורף בסוף הקובץ.

1.3 מטוטלת

ראיתם את משוואות התנועה של מטוטלת עבור תנודות קטנות בכיתה נפתור בצורה שונה את אותו התרגיל.

דוגמה־ תרגיל 2, פתרון מצורף בסוף הקובץ. זהו חלק משאלה ממבחן מועד ב 2011 של הקורס.

השאלה

נתון המעגל שמופיע באיור, ברגע התחלת המדידה הקבל טעון במתח V_c.

1. הצג בגרף את השינוי בזמן של הזרמים, המטענים והשדות המגנטיים שישנם ברכיבים השונים המוצגים באיור. הסתמך על משוואות מתאימות לתיאור זה! (ניתן להתייחס למשרן כאל סלנואיד בעל N ליפופי, אורך l ורדיוס R)
2. כאשר הקבל נטען למתח ההתחלתי שלו, רגע לפני תחילת תנועת המטענים, אדם פלאי ממלאו בתווך דיאלקטרי ε כיצד הדבר ישפיע על סעיף 1?
3. אם נניח רכיבים אידיאליים (ללא יצירת חום), האם הזרם בבעיה ידעך או יישמר?

פתרון

.1

מחוקי קירכהוף המתחים והזרמים על הרכיבים זהים: $V_C = V_L, I_L = I_C$
ולכן $\frac{Q}{C} = -L\dot{I}$.
כיוון ש $I = \dot{Q}$ נקבל:

$$\ddot{Q} = -\frac{1}{LC}Q$$

פתרון משוואה זו:

$$Q(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

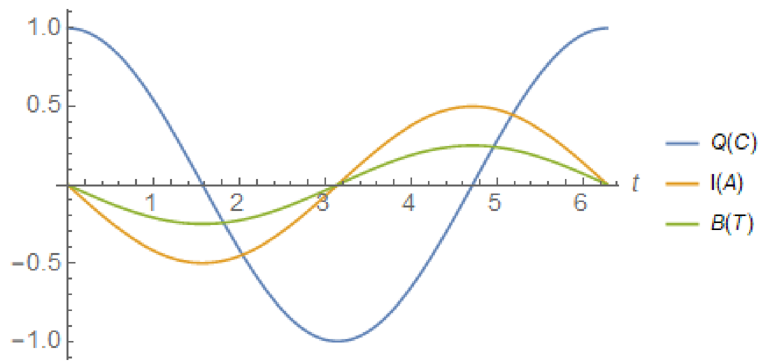
כאשר $\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
מהנתונים אנו יודעים כי $Q(t=0) = V_C C$ נסמן $V_C C = Q_0$.
כמו כן אין זרם במעגל ברגע הראשון לכן $\dot{Q}(t=0) = I(t=0) = 0$
מנתונים אלו נקבל:

$$-A\omega\sin\varphi = 0 \Rightarrow \phi = 0, \pi$$

$$A\cos\phi = \pm A = Q_0$$

קיבלנו שתי אפשרויות שנותנות את אותו הפתרון:

$$Q(t) = Q_0\cos(\omega t)$$



איור 1: גרף של הזרם במעגל, המטען בקבל והשדה בסליל עבור
$B_0 = 0.25T, I_0 = 0.5A, Q_0 = 1C$

כעת נוכל לחשב את הזרם במעגל:

$$I(t) = -I_0 \sin(\omega t)\ ,\ I_0 = Q_0\omega$$

וכן את השדה המגנטי בסליל:

$$B(t) = I(t)\frac{N}{l}\mu_0 = -B_0 \sin(\omega t)\ ,\ B_0 = I_0\frac{N}{l}\mu_0$$

ולצייר את הגרף המבוקש (ראה איור 1)

.2

הכנסת חומר דיאלקטרי לקבל לאחר שנטען תשנה את הקיבול והמתח על הקבל אולם המטען ההתחלתי יישאר זהה. הקיבול החדש $C' = \varepsilon C > C$ ולכן התדר הזוויתי החדש של המערכת $\omega' = \frac{1}{\sqrt{LC'}}$. הפתרון לסעיף 1יישתנה רק בהחלפת $\omega \to \omega'$. כלומר: התדר של שינויי המטען, הזרם והשדה המגנטי יהיה נמוך יותר, כלומר זמני המחזור יהיו ארוכים יותר: $T' = \frac{2\pi}{\omega'} = 2\pi\sqrt{LC'} > 2\pi\sqrt{LC} = T$. בנוסף האמפליטודות של הזרם והשדה המגנטי יהיו קטנות יותר, שכן הן תלויות ב ω.

.3

הזרם בבעיה יישמר, כלומר האמפליטודה שלו, I_0לא תשתנה, הזרם המקסימאלי לכל כיוון יהיה תמיד זהה. אם הרכיבים היו לא אידיאליים חלק מהאנרגיה הייתה הופכת לחום ולכן אמפליטודת הזרם (וגם המטען והשדה המגנטי) הייתה דועכת עם הזמן.

מטוטלת

משקולת במשקל m תלויה על חוט באורך l.

א. כתוב את משוואות התנועה כפונקצייה של הזוית מהאנך θ

ב. הנח שמדובר בזויות קטנות ומצא את התדירות הזוויתית העצמית ω.

ג. בהנתן תנאי התחלה $\theta\left(t=0\right)=0\ ,\ \frac{d\theta}{dt}\left(t=0\right)=v$ מצא את הפאזה.

פתרון:

א. נרשום את הכוחות הפועלים על המטוטלת כאשר היא בזוית θ מהאנך:

בציר x:

$$f_x=-T\sin\theta$$

בציר y:

$$f_y=T\cos\theta-mg$$

לכן משוואות התנועה עבור x ו y הן:

$$m\ddot{x}=-T\sin\theta$$

$$m\ddot{y}=T\cos\theta-mg$$

נכפיל את המשוואה הראשונה ב$\cos\theta$ ואת השנייה ב $\sin\theta$ ונחבר:

$$m\left(\ddot{x}\cos\theta+\ddot{y}\sin\theta\right)=-mg\sin\theta$$

כעת נרצה לרשום את המשוואות כפונקציה של θ. נגדיר את ראשית הצירים בנקודה בה החוט מחובר לתקרה. נשים לב כי:

$$x=l\sin\theta$$

$$y=-l\cos\theta$$

ולכן:

$$\dot{x} = l\cos\theta\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{x} = l\cos\theta\ddot{\theta} - l\sin\theta\left(\dot{\theta}\right)^2$$

$$\dot{y} = l\sin\theta\dot{\theta} \Rightarrow \ddot{y} = l\sin\theta\ddot{\theta} + l\cos\theta\left(\dot{\theta}\right)^2$$

נציב במשוואת התנועה שמצאנו:

$$ml\left(\cos^2\theta\ddot{\theta} - \sin\theta\cos\theta\left(\dot{\theta}\right)^2 + \sin^2\theta\ddot{\theta} + \cos\theta\sin\theta\left(\dot{\theta}\right)^2\right) = -mg\sin\theta \Rightarrow$$

$$l\ddot{\theta} = -g\sin\theta$$

ב. בהנחה שהזוית קטנה $\sin\theta \approx \theta$ (טור טיילור סדר ראשון סביב $\theta = 0$) ולכן נקבל את המשוואה:

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l}\theta$$

שפתרונה:

$$\theta(t) = A\cos(\omega t + \varphi)\ ,\ \omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

כאשר A, φ קבועים ו ω היא התדירות העצמית של המערכת.
ג. נציב את תנאי ההתחלה:
תנאי ההתחלה הראשון ייתן לנו

$$\theta(t=0) = A\cos\varphi = 0$$

כלומר $A = 0$ או $\varphi = \pm\frac{\pi}{2}$.
תנאי ההתחלה השני ייתן

$$\frac{d\theta}{dt}(t=0) = -A\omega\sin\varphi = v$$

זה פוסל את הפתרון $A=0$ ומשאיר אותנו עם פאזה $\varphi=\pm\frac{\pi}{2}$, לכן $\sin\varphi=\pm1$ ונקבל שני פתרונות אפשריים עבור A,φ:
פתרון ראשון

$$\varphi=\frac{\pi}{2}\ ,\ A=-\frac{v}{\omega}$$

פתרון שני

$$\varphi=-\frac{\pi}{2}\ ,\ A=\frac{v}{\omega}$$

נשים לב ששני הפתרונות האלו הם למעשה פתרון אחד עבור משוואת התנועה שכן מהפתרון הראשון נקבל:

$$\theta\left(t\right)=-\frac{v}{\omega}\cos\left(\omega t+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{v}{\omega}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(-\omega t\right)\right)=-\frac{v}{\omega}\sin\left(-\omega t\right)=\frac{v}{\omega}\sin\left(\omega t\right)$$

ומהפתרון השני:

$$\theta\left(t\right)=\frac{v}{\omega}\cos\left(\omega t-\frac{\pi}{2}\right)=\frac{v}{\omega}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\omega t\right)=\frac{v}{\omega}\sin\left(\omega t\right)$$

קיבלנו פתרון זהה.