

הערות לגבי המבחן

המבחן יתקיים ב 16 ליולי בשעה 9 בבוקר (מועד ב' יתקיים ב 2 באוגוסט באותה שעה). המבחן יהיה במתכונת דומה לשנה שעברה, 5 שאלות מתוכן יש לבחור 4 שאלות, כל שאלה בת 25 נקודות. משך הבחינה 3 וחצי שעות. מותר להשתמש רק בדף הנוסחאות שתקבלו עם המבחן (נמצא באתר הקורס) אסור להשתמש במחשבון, אם יהיו חישובים שקשה לעשות בלי מחשבון תוכלו להשאיר אותם כמו שהם (למשל תשובה מקובלת לשאלה "המר את האנרגיה $2J$ ליחידות של eV " תהיה $eV \frac{2}{1.6 \cdot 10^{-19}}$). החומר למבחן הוא כל החומר שנלמד בהרצאות והתרגולים.

המלצות ללמידה למבחן

1. לקרוא את ההרצאות והתרגולים ולוודא שמבינים את החומר. שימו לב שחלק מהסיכום של ההרצאות בנושא מכניקת הקוונטים לא נלמד השנה (ראו בפירוט החומר למבחן שבאתר). לתרגול נוסף אפשר לנסות לפתור לבד את התרגילים מהתרגול.
2. לעבור על התרגילים והפתרונות שלהם ולוודא שמבינים את הפתרון ויודעים איך לפתור לבד. לשים דגש על תרגילים שלא פתרתם או לא הצלחתם לפתור במהלך השנה.
3. באתר הקורס יש מבחנים משנים קודמות עם פתרונות (בחלק מהקבצים יש גם מועד א' וגם מועד ב', תגללו עד הסוף למטה). אני ממליץ לפתור אותם כסימולציה, כלומר למדוד 3 וחצי שעות בסטופר ולפתור את המבחן ואז לנקד את עצמכם ולבדוק מה הבנתם ומה לא.

שעות קבלה ותרגול חזרה למבחן

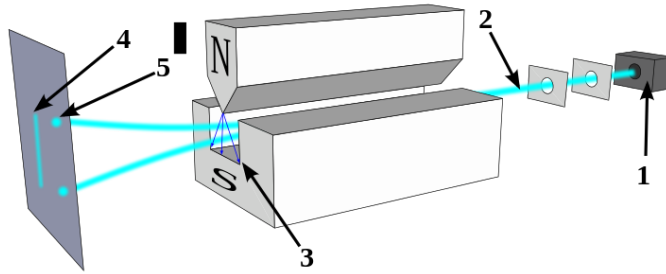
לא יתקיימו שעות קבלה בתקופת המבחנים בשעה הרגילה. מי שרוצה להגיע לשעת קבלה מוזמן לתאם איתי במייל. אני אשתדל לקיים תרגול חזרה בשבוע שלפני המבחן. בתרגול נפתור תרגילים לבקשתכם.

אטומים בשדה מגנטי

באופן אינטואיטיבי אנחנו חושבים על האטום כגרעין שסביבו מסתובבים אלקטרונים. האלקטרונים שמסתובבים הם כמו טבעת זרם, לכן הגיוני לצפות שיהיה להם מומנט מגנטי. למרות שהאלקטרונים לא באמת מסתובבים סביב הגרעין, כפי שראינו מפתרון משוואת שרדינגר, עדיין יש להם מומנט מגנטי שקשור לתנע הזוויתי. האנרגיה הפוטנציאלית של אלקטרון בעל תנע זייתי $L_z = m\hbar$ (המספר הקוונטי שקובע את התנע הזוויתי בכיוון z) תחת השפעת שדה מגנטי אחיד בכיוון z ובעוצמה B היא:

$$U_l = -\frac{e}{2m_e} L_z B = -\mu_B m B$$

כאשר $\mu_B = \frac{\hbar e}{2m_e} = 9.274 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$ נקרא המגנטון של בוהר.



איור 1: מערכת הניסוי של Stern – Gerlach. (1) מאיץ אטומים. (2) קרן של אטומים. (3) איזור עם שדה מגנטי לא אחיד בכיוון z (4) התוצאה שמצופית מספין קלאסי. (5) תוצאת הניסוי

ניסוי Stern – Gerlach

בניסוי זה ניסו למדוד את המומנט המגנטי של אטומים שונים. בניסוי שולחים קרן של אטומים מסוג מסויים דרך איזור בו יש שדה מגנטי שאינו אחיד בכיוון z : $B = Gz$ (ראה איור 1), כאשר G הוא גרדיאנט השדה המגנטי (הנגזרת בכיוון z במקרה זה) ונמדד ביחידות של טסלה למטר. האנרגיה הפוטנציאלית של אטום תהיה:

$$U_l = -\mu_B m G z$$

והכח בכיוון z :

$$F = -\frac{\partial U_s}{\partial z} = \mu_B m G$$

כלומר, הכח שפועל על כל אטום תלוי בתנע הזוויתי שלו בכיוון z , לכן נצפה מקרן של אטומים בעלי תנע זוויתי כולל l להתפצל ל $2l + 1$ קרניים שונות, כל קרן עם אטומים בעלי תנע זוויתי שונה בכיוון z .

הניסוי המפורסם בוצע עם אטומי כסף. היה ידוע כי לאטום כסף במצב היסוד יש תנע זוויתי 0 בכיוון z , $m = 0$ ולכן היה צפוי שהקרן לא תתפצל. מצד שני היו כבר רמזים לכך שלאקטרון יש מומנט מגנטי משלו. בניסוי רצו לבדוק האם השערה זו נכונה. תוצאות הניסויי אכן הראו כי קרן האטומים התפצלה לשתי קרניים. ניסוי זה הוכיח כי לאקטרון יש מומנט מגנטי פנימי, שנקרא "ספין" וכן הראה את התכונות שלו:

1. לספין של האלקטרון יש גודל קבוע (אי אפשר לגרום לאלקטרון "להסתובב" מהר או לאט יותר) $s = \frac{\hbar}{2}$.

2. לספין של האלקטרון יש רק שני "כיוונים" (אחרת היינו מקבלים כתם מרוח על המסך בניסויי במקום שתי נקודות) אנחנו קוראים לכיוונים האלו למעלה- Up ולמטה- $Down$.

3. האנרגיה של אלקטרון עם ספין $m_s = \pm \frac{1}{2}$ בכיוון z בשדה מגנטי אחיד בכיוון z היא $U_s = -2\mu_B m_s B$ ולכן הכח שפועל עליו במכשיר $Stern - Gerlach$ בעל גרדיאנט שדה G הוא $F = 2\mu_B m_s G$.

מאוחר יותר גילו שגם לחלקיקים אחרים יש ספינים שונים. בנוסף הספין מחלק את החלקיקים לשני סוגים עיקריים.

פרמיונים הם חלקיקים בעלי ספין חצי שלם $(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots)$ (וכו') על חלקיקים אלו חל עקרון האיסור של פאולי שקובע ששני פרמיונים מאותו סוג (למשל שני אלקטרונים) לא יכולים להיות באותו מצב קוונטי. דוגמאות: אלקטרונים, ניוטרונים, פרוטונים וכו' (למעשה כל מה שאנחנו קוראים לו "חומר" מורכב מפרמיונים).

בוזונים חלקיקים בעלי ספין שלם $(1, 2, 3, \dots)$ (וכו') בוזונים יכולים להיות בכל מצב קוונטי בלי תלות בבוזונים אחרים. דוגמאות: פוטונים (נושאי הכח החשמלי), גלואונים (נושאי הכח הגרעיני החזק), חלקיקי W, Z (נושאי הכח החלש). הבוזונים הם החלקיקים שמעבירים את הכוחות השונים בטבע.

מבנה האטום- שינויים בעקבות גילוי הספין

כאשר גילו את הספין נדרשו כמה שינויים בפונקציות הגל של אלקטרון באטום המימן: ראשית, המצב של האלקטרון דורש כעת 4 מספרים קוונטיים: n - אנרגיה, l - תנע זוויתי כולל, m - תנע זוויתי בכיוון z , m_s - ספין בכיוון z . m_s יכול לקבל שני ערכים $\pm \frac{1}{2}$.

בתור גודל מדיד יש לספין אופרטור מתאים \hat{S}_z . המצבים העצמיים של האלקטרון באטום המימן הם מצבים עצמיים של אופרטור הספין:

$$\hat{S}_z |\psi_{n,l,m,m_s}\rangle = \hbar m_s |\psi_{n,l,m,m_s}\rangle$$

מעקרון האיסור של פאולי נובע כי כל אורביטל יכול להיות מאוכלס ע"י $2(2l + 1)$ אלקטרונים. זה קובע לנו את מבנה הטבלה המחזורית ואת תכונות היסודות השונים. למשל: אטום שבו האורביטל הכי חיצוני מלא יהיה גז אציל (למשל ניאון שבו $1s, 2s, 2p$ מלאות), אטום עם אורביטל חיצוני בעל מעט אלקטרונים יהיה מוליך (למשל נחושת עם כל רמות האנרגיה $1, 2, 3$ מלאות ואלקטרון בודד ב $4s$).
כאשר מפעילים שדה מגנטי בכיוון z על האטום יש שינוי באנרגיה הפוטנציאלית שלו כתוצאה מהשדה:

$$U_B = -\mu_B m B - 2\mu_B m_s B = -\mu_B B (m + 2m_s)$$

שינויי זה באנרגיה נקרא "אפקט זימן".

בנוסף, כיוון שלאלקטרון יש שני שדות מגנטיים שונים, בגלל הספין ובגלל התנע הזוויתי, יש השפעה הדדית ביניהם שנקראת פוטנציאל $U_{S.O.} \propto \mathbf{S} \cdot \mathbf{L}$. *Spin – Orbit*. ההשפעה הזו גורמת לכך שלאלקטרונים עם תנע זוויתי וספין שונים יהיו אנרגיות מעט שונות, גם ללא שדה מגנטי חיצוני.

לסיכום: כתוצאה מכך שלאלקטרון יש ספין, מומנט מגנטי עצמי, לכל אלקטרון תהיה אנרגיה מעט שונה בגלל צימוד *Spin–Orbit* צימוד זה גורם לשינוי קטן באנרגיה שלא נחשב במדויק בקורס זה. כאשר מפעילים שדה מגנטי על האטום נוצר שוני גדול יותר בין האנרגיות של האלקטרונים השונים, שנקרא אפקט זימן. ניתן למדוד שוני זה בעזרת ספקטרוסקופיה, בה מודדים את הפוטונים שנפלטים כתוצאה ממעבר אלקטרונים בין אנרגיות שונות, או בניסויי *Stern – Gerlach* בו מודדים ישירות את הכח ששדה מגנטי לא אחיד מפעיל על האטומים.

דוגמה: ניסויי Stern – Gerlach עם אטומי מימן

ניסויי שטרך גרלך עם קרן אטומי מימן

נתון אטום מימן שבו האלקטרון נמצא במצב:

$$|\psi\rangle = A (2 |\psi_{2,0,0,1/2}\rangle + |\psi_{2,1,1,-1/2}\rangle + |\psi_{2,1,-1,-1/2}\rangle)$$

- א. מהו A ?
ב. אילו היינו מעבירים אלומה של אטומים אלו בשטרך גרלך, כמה כתמים היו מופיעים על המסך?
ג. באיזה מרחק היו מופיעים הכתמים זה מזה אם אורך מכשיר סטרך גרלך בניסוי הוא 2 ס"מ, גרדיאנט השדה המגנטי הוא 2 טסלה למטר והאטומים נעים במהירות 10 מטר לשנייה?
ד. מהו המומנט המגנטי הממוצע של האטום?

פתרון

א. נמצא את A לפי תנאי הנרמול:

$$1 = \langle \psi | \psi \rangle = |A|^2 (4 + 1 + 1) = 6 |A|^2 \Rightarrow A = \frac{1}{\sqrt{6}}$$

ב. הכח שעובד על האטום תלוי בתנע הזוויתי שלו בכיוון z ובספין שלו בכיוון z . למעשה העברת אטום במכשיר שטרך גרלך היא מדידה, היא מכריחה כל אטום "לבחור" מה התנע הזוויתי והספין שלו בכיוון z (מקריסה את פונקציית הגל). הכח שיפעל על כל אטום בכיוון z יהיה

$$f = -\frac{\partial U_B}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial z} (-\mu_B B (m + 2m_s)) = \mu_B (m + 2m_s) \frac{\partial}{\partial z} B$$

כאשר במקרה של סטרך גרלך $B = Gz$ ולכן:

$$f = \mu_B (m + 2m_s) G$$

במקרה שלנו הערכים האפשריים הם:

$$f = \mu_B G \text{ יהיה } m = 0, m_s = 1/2$$

$$f = 0 \text{ יהיה } m = 1, m_s = -1/2$$

$$f = -2\mu_B G \text{ יהיה } m = -1, m_s = -1/2$$

לכן נקבל שלושה כתמים שונים על המסך.

ג. הזמן שלוקח לאטום לעבור את מכשיר שטרך גרלך הוא $t = \frac{L}{v} = \frac{2cm}{10m/s} = 2 \cdot 10^{-3} s$

כאשר L אורך מכשיר סטרך גרלך ו v מהירות האטום. במהלך זמן זה פועל עליו כח אחיד f בכיוון z . לפי חוק שני של ניוטון:

$$m\ddot{z} = f \Rightarrow m\dot{z} = ft + v_0 \Rightarrow mz = \frac{1}{2}ft^2 + v_0t + z_0$$

כאשר v_0 המהירות ההתחלתית בכיוון z ו z_0 ההעתק ההתחלתי בכיוון z . במקרה שלנו אין מהירות התחלתית בכיוון z ונקבע את מערכת הצירים כך ש $z_0 = 0$ ולכן:

$$z = \frac{ft^2}{2m}$$

האטומים שיקרסו למצב $m = 0, m_s = 1/2$ יפגעו במסך ב

$$z = \frac{\mu_B G t^2}{2m} = \frac{9.274 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T} \cdot 2 \frac{T}{m} (2 \cdot 10^{-3} s)^2}{2 \cdot 1.67 \cdot 10^{-27} kg} \approx 0.022m$$

כלומר במרחק של כ 2 ס"מ ממיקומם ההתחלתי.
האטומים שיקרסו למצב $m = 1, m_s = -1/2$ יפגעו ב $z = 0$ כי לא פועל עליהם כח.
האטומים שיקרסו למצב $m = -1, m_s = -1/2$ יפגעו במסך ב

$$z = -2 \frac{\mu_B G t^2}{2m} = -\frac{9.274 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T} \cdot 2 \frac{T}{m} (2 \cdot 10^{-3} s)^2}{1.67 \cdot 10^{-27} kg} \approx -0.044m$$

כלומר במרחק של כ 4 ס"מ ממיקומם ההתחלתי.
לכן המרווח בין הכתם התחתון לאמצעי יהיה כ 4 ס"מ ובין האמצעי לעליון כ 2 ס"מ.
ד. המומנט המגנטי הכולל של אטום הוא $\frac{e}{2m} (2S_z + L_z)$ ולכן המומנט הממוצע של האטום הנתון:

$$\frac{e}{2m} \langle 2S_z + L_z \rangle = \frac{e}{2m} (2 \langle S_z \rangle + \langle L_z \rangle)$$

הספין הממוצע בכיוון z :

$$\langle S_z \rangle = \langle \psi | \hat{S}_z | \psi \rangle =$$

$$(A^* (2 \langle \psi_{2,0,0,1/2} | + \langle \psi_{2,1,1,-1/2} | + \langle \psi_{2,1,-1,-1/2} |)) (A (2 \hat{S}_z | \psi_{2,0,0,1/2} \rangle + \hat{S}_z | \psi_{2,1,1,-1/2} \rangle + \hat{S}_z | \psi_{2,1,-1,-1/2} \rangle))) =$$

$$(A^* (2 \langle \psi_{2,0,0,1/2} | + \langle \psi_{2,1,1,-1/2} | + \langle \psi_{2,1,-1,-1/2} |)) (A (2 \frac{\hbar}{2} | \psi_{2,0,0,1/2} \rangle - \frac{\hbar}{2} | \psi_{2,1,1,-1/2} \rangle - \frac{\hbar}{2} | \psi_{2,1,-1,-1/2} \rangle))) =$$

$$|A|^2 \left(4 \frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} - \frac{\hbar}{2} \right) = \frac{\hbar}{6}$$

התנע הזוויתי הממוצע בכיוון z:

$$\langle L_z \rangle = \langle \psi | \hat{L}_z | \psi \rangle =$$

$$(A^* (2 \langle \psi_{2,0,0,1/2} | + \langle \psi_{2,1,1,-1/2} | + \langle \psi_{2,1,-1,-1/2} |)) (A (2 \hat{L}_z | \psi_{2,0,0,1/2} \rangle + \hat{L}_z | \psi_{2,1,1,-1/2} \rangle + \hat{L}_z | \psi_{2,1,-1,-1/2} \rangle)) =$$

$$(A^* (2 \langle \psi_{2,0,0,1/2} | + \langle \psi_{2,1,1,-1/2} | + \langle \psi_{2,1,-1,-1/2} |)) (A (2 \cdot 0 | \psi_{2,0,0,1/2} \rangle + \hbar | \psi_{2,1,1,-1/2} \rangle - \hbar | \psi_{2,1,-1,-1/2} \rangle)) =$$

$$|A|^2 (\hbar - \hbar) = 0$$

ולכן המומנט המגנטי הממוצע של האטום הוא

$$\frac{e}{2m} (2 \langle S_z \rangle + \langle L_z \rangle) = \frac{e}{2m} \frac{\hbar}{3} = \frac{\mu_B}{3} = 3.08 \cdot 10^{-24} \frac{J}{T}$$