1 מנהלות

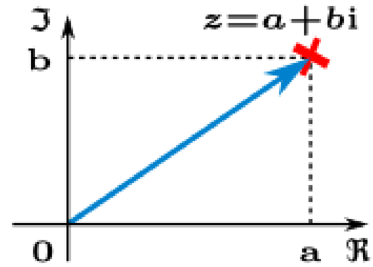
- הקורס מתנהל דרך אתר הקורס במחלקה לפיסיקה. קישור לאתר נמצא בדף המודל של הקורס.
- הציון בקורס הוא 100% ציון המבחן.
- בכדי לגשת למבחן יש להגיש 80% משיעורי הבית (כלומר 10 מתוך 13 תרגילים). שיעורי הבית יבדקו באופן מדגמי. מי שלא מגיש 80% מהתרגילים ציונו יורד ב 3 נקודות על כל תרגיל חסר.
- בכל שבוע יעלה תרגיל לאתר הקורס. הדד־ליין להגשה הוא עד יום חמישי בשבוע שאחרי התרגול הקשור לאותו תרגיל בשעה $23:00$.
- המבחן כולל 5 שאלות מתוכן יש לבחור 4. חומר העזר היחיד המותר במבחן הוא דף הנוסחאות (מפורסם באתר).
- סיכום התרגול יעלה לאתר לפני התרגול (בשאיפה כמה ימים לפני). מומלץ להדפיס אותו ולהגיע איתו לתרגול בכדי לא לבזבז זמן בהעתקה מהלוח
- שעת הקבלה שלי היא ביום רביעי בשעה $13:00-14:00$ בחדר 319 בבניין 54. שעת הקבלה נקבעה באקראי, אשמח אם מישהו מהוועד ייצור איתי קשר בכדי שנוכל לתאם שעת קבלה שמתאימה לכולם.
- מנסיוני צילומי הקורס באיכות הכי טובה נעשים בעזרת סמארטפון. אשמח אם מישהו יתנדב לצלם את אחד התרגולים ויישלח לי את הצילומים, אני אעלה את הצילומים לאתר הקורס.
- שאלות שאינן אישיות (בנוגע לתרגילים, תרגולים, חומר הקורס וכו') לשאול בפורום הקורס (קישור באתר).
- שאלות אישיות (הארכות, פטורים וכו') לשאול במייל.
- אם יש למישהו בקשות מיוחדות (למשל בקשות עקב לקויות למידה) נא לפנות אליי במייל. $kasirer@post.bgu.ac.il$.
- התרגיל הראשון הוא תרגיל חזרה ולכן יכלול חומר מקורסים קודמים שלא נתרגל היום. אם יש בעיה עם אחד התרגילים אנא פנו אליי (לפני ההגשה) ואני אעלה הסבר.

2 מספרים מרוכבים

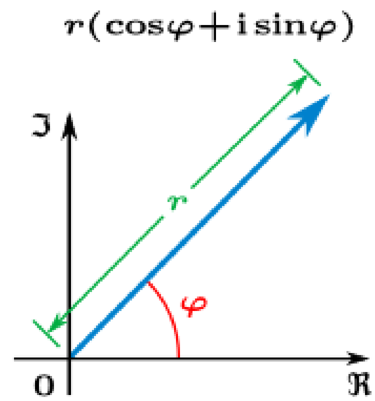
מספר מרוכב הוא מספר מהצורה $z=a+ib$ כאשר a,b מספרים ממשיים ו i מוגדר ע"י $i\cdot i=-1$. קבוצת המספרים המרוכבים מסומנת באות $\mathbb{C}$. $Re\left[z\right]=a$ הוא החלק הממשי של z ו $Im\left[z\right]=b$ הוא החלק המדומה.

הדרך הכי נוחה לתאר מספר מרוכב היא באמצעות תיאור גיאומטרי כאשר ציר x הינו החלק הממשי וציר y המדומה. בתיאור זו המספרים המרוכבים ממופים למספרים במישור הממשי.

באנלוגיה גיאומטרית ההצגה $z=a+ib$ נקראת ההצגה הקרטזית של z (ראה איור 1). ניתן להציג את z גם באמצעות הצגה פולארית $z=r\left(\cos\varphi+i\sin\varphi\right)$ (ראה איור 2) כאשר



איור 1: הצגה קרטזית של מספר מרוכב



איור 2: הצגה פולארית של מספר מרוכב

$r=|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ נקרא הנורמה של z ו $\varphi=arg\left(z\right)=\begin{cases}\arctan\frac{b}{a} & a>0\\ -\arctan\frac{b}{a} & a<0\\ \frac{\pi}{2} & a=0,b\geq0\\ -\frac{\pi}{2} & a=0,b<0\end{cases}$
נקרא הארגומנט או הפאזה של z.

נוסחת אויילר מקשרת בין ההצגה הפולארית של מספרים מרוכבים לבין האקספוננט הטבעי e:

$$\cos\varphi+i\sin\varphi=e^{i\varphi}$$

לנוסחה זו הוכחות רבות, אחת מהם תתבקשו לבצע בשיעורי הבית.

2.1 פעולות על מספרים מרוכבים

2.1.1 חיבור

חיבור של מספרים מרוכבים מתבצע ע"י חיבור החלק הממשי והמדומה בנפרד, למשל עבור $z_1 = a_1 + ib_1\ ,\ z_2 = a_2 + ib_2$:

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + i\,(b_1 + b_2)$$

בתיאור הגיאומטרי זה כמו חיבור וקטורי (כלל המקבילית).

2.2 כפל

כפל של מספרים מרוכבים מתבצע לפי חוק הפילוג הרגיל. בהצגה קרטזית:

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1 \cdot x_2 - y_1 \cdot y_2) + i\,(x_1 \cdot y_2 + x_2 \cdot y_1)$$

הרבה יותר קל להבין מה בדיוק כפל "עושה" בהצגה הפולארית (כאן גם מתגלה היתרון של נוסחת אויילר):

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}$$

כלומר, כפל של מספר מרוכב במספר אחר יגרום "למתיחה" פי הנורמה של המספר המרוכב וסיבוב בפאזה שלו.

2.3 למה זה טוב?

- כאשר מדובר בגלים אנחנו נעבוד המון עם פונקציות טריגונומטריות, לעיתים קרובות שימוש במספרים מרוכבים מקל על פתרון המשוואות ועל החישובים השונים. בנוסף, כיוון שכל המשוואות שנעבוד איתן לינאריות וממשיות (כוללות כפל בקבוע ממשי, נגזרות,סכום והפרש) החלקים הממשיים והמדומים של מספר מרוכב לא "יתערבבו" ולכן במקום לעבוד עם $\cos\theta (\sin\theta)$ נוכל לעבוד עם $e^{i\theta}$ ולקחת בסוף חלק ממשי (מדומה).
- בחלק של הקורס שעוסק במכניקת הקוונטים נהיה חייבים להשתמש במספרים מרוכבים שכן כל תורת הקוונטים מוגדרת במרחב וקטורי מעל שדה המספרים המרוכבים $\mathbb{C}$.
- נוסחת אויילר היא כלי יעיל להוכחת זהויות טריגונומטריות, ע"י שימוש בנוסחה ניתן לכתוב את הפונקציות הטריגונומטריות בעזרת אקספוננטים:
-

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}\ ,\ \cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$

2.4 דוגמה

ע"י שימוש בנוסחת אוילר הוכיחו את הזהות הטריגונומטרית

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

2.4.1 פתרון

נתחיל מאגף ימין ונגיע לאגף שמאל:

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\frac{1}{4i}\left(\left(e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}+e^{-i\beta}\right)+\left(e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}\right)\left(e^{i\beta}-e^{-i\beta}\right)\right)=$$

$$\frac{1}{4i}\left(2e^{i\alpha}e^{i\beta}-2e^{-i\alpha}e^{-i\beta}\right)=\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i}=\sin(\alpha+\beta)$$

3 טור טיילור

טור טיילור הוא דרך למצוא נוסחא מקורבת לפונקציה סביב נקודה כלשהי ע"י פולינום. נניח שיש לנו פונקצייה $f(x)$ אנליטית (כלומר גזירה אינסוף פעמים[1]) בנקודה $x=a$. אנחנו יודעים את הערך שלה עבור $x=a$ וגם את הערך של הנגזרות שלה בנקודה $x=a$. נרצה לחשב את ערך הפונקציה בנקודה b שקרובה לנקודה a, כלומר $|a-b|\ll 1$. נוכל לעשות זאת ע"י פיתוח לטור טיילור.

3.1 הגדרה

טור טיילור של f סביב הנקודה a לסדר N מוגדר ע"י

$$T_{f,a}^{N}(x)=\sum_{n=0}^{N}\frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^{n}$$

כאשר הסימון $f^{(n)}(a)$ אומר לגזור n פעמים את $f(x)$ ואז להציב $x=a$.

שימוש נפוץ מאוד בפיסיקה הוא לפתח פונקצייה לטור טיילור כאשר המשתנה $x\ll 1$, כלומר לפתח סביב $a=0$. לטור טיילור עם $a=0$ יש שם מיוחד, טור מקלורן.

ניתן להוכיח כי טור טיילור הינו יחיד, ועבור פונקציות אנליטיות גם מתכנס לפונקצייה בכל נקודה. כלומר

[1] למעשה פונקציה אנליטית בנקודה a היא פונקציה עבורה קיימת סביבה מלאה של הנקודה a בה טור טיילור של הפונקציה מתכנס

$$f\left(x\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{\left(n\right)}\left(a\right)}{n!}\left(x-a\right)^{n}$$

הערה: בקורס הזה לא נוכיח אילו פונקציות אנליטיות ואילו לא, נשתמש בכך שהפונקציות הטריגונומטריות, אקספוננטים, פולינומים וכל מכפלה\חיבור\חיסור\הרכבה\חילוק שלהן הוא פונקציה אנליטית בתחום ההגדרה (כל עוד לא מחלקים באפס).

3.2 למה זה טוב?

משתמשים בטור טיילור לחישוב מקורב של ערכים של פונקציות, בשימוש רחב מאוד עבור קרובים בפיסיקה אבל גם עבור אפליקציות שימושיות (למשל המחשבון מחשב את ערכי הפונקציות הטריגונומטריות בעזרת טור טיילור).

כיוון שטור טיילור הינו יחיד ניתן להוכיח שיוויון בין פונקציות ע"י שיוויון בין טורי טיילור שלהן (שיעורי בית).

3.3 זהויות

3.3.1 סכום

$$T_{f+g,a}^{N}\left(x\right)=T_{f,a}^{N}\left(x\right)+T_{g,a}^{N}\left(x\right)$$

3.3.2 מכפלה

$$T_{f\cdot g,a}^{N}\left(x\right)=\left[T_{f,a}^{N}\left(x\right)\cdot T_{g,a}^{N}\left(x\right)\right]_{N}$$

כאשר הסימון $\left[\cdot\right]_{N}$ אומר "לקטום" איברים מעל סדר N. כלומר פשוט למחוק כל איבר עם x בחזקת מספר גדול מN.

3.3.3 הרכבה

$$T_{f(g),a}^{N}\left(x\right)=\left[T_{f,g(a)}^{N}\left(T_{g,a}^{N}\left(x\right)\right)\right]_{N}$$

3.4 דוגמה

פתחו את הפונקציות הבאות בטור טיילור עד סדר שני, סביב הנקודה $x=0$.

א. $f\left(x\right)=\cos x$

נגזור פעמיים:

$$\cos0=1,\frac{d\cos x}{dx}|_{0}=\sin0=0,\frac{d^{2}\cos x}{dx}=-\cos0=-1$$

נציב בנוסחה:

$$T^2_{0,\cos x}(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$$

הערה: במקרה זה קל לפתח את טור טיילור לכל סדר כיוון ש:

$$\frac{d^n \cos x}{dx^n}|_0 = \begin{cases} 1 & n \; is \; devisible \; by \; 4 \\ 0 & n \; is \; odd \\ -1 & else \end{cases}$$

ולכן:

$$\cos x = \sum_{n=0 \; and \; n \; is \; even}^{\infty} \frac{(-1)^{\frac{n}{2}}}{n!}x^n \underbrace{=}_{change \; of \; summation \; variable}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}x^{2n}$$

פיתוח דומה ניתן לבצע גם ל$\sin x$ וe^x(שיעורי בית).
ב. $g(x) = \ln(1+x)$
נגזור פעמיים:

$$g(0) = 0 \; , \; \frac{dg(x)}{dx}|_0 = \frac{1}{1+x}|_0 = 1 \; , \; \frac{d^2g(x)}{dx^2} = -\frac{1}{(1+x)^2}|_0 = -1$$

נציב בנוסחה:

$$T^2_{0,g} = x - \frac{1}{2}x^2$$

ג. $h(x) = \frac{1}{(a+bx^2)^{3/2}}$
נפתח ע"י שימוש בכלל ההרכבה, נסמן $f(x) = a + bx^2$ ו $g(y) = \frac{1}{y^{3/2}}$.
כעת אנחנו צריכים לפתח את f סביב $x = 0$ אבל כיוון ש f היא כבר פולינום של $x - a$ וטור טיילור הוא יחיד אז טור טיילור של f לסדר שני (וגם לכל סדר גבוהה יותר) סביב 0 הוא $a + bx^2$.
את g אנחנו צריכים לפתח סביב $f(0) = a$:

$$g\left(a\right)=\frac{1}{a^{3/2}}\ ,\ \frac{dg\left(y\right)}{dy}|_{a}=-\frac{3}{2a^{5/2}}\ ,\ \frac{dg\left(y\right)}{dy^{2}}=\frac{15}{4a^{7/2}}$$

לכן:

$$T_{g(f),0}^{2}\left(x\right)=\left[T_{g,a}^{2}\left(y=T_{f,0}^{2}\left(x\right)\right)\right]_{2}=\left[\frac{1}{a^{3/2}}-\frac{3\left(y-a\right)}{2a^{5/2}}+\frac{15\left(y-a\right)^{2}}{8a^{7/2}}\right]_{2}=$$

$$\left[\frac{1}{a^{3/2}}-\frac{3\left(bx^{2}\right)}{2a^{5/2}}+\frac{15\left(bx^{2}\right)^{2}}{8a^{7/2}}\right]_{2}=\frac{1}{a^{3/2}}-\frac{3bx^{2}}{2a^{5/2}}$$

1_1203 גליון

$$\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta=\left(\frac{e^{i\alpha}-e^{-i\alpha}}{2i}\right)\left(\frac{e^{i\beta}+e^{-i\beta}}{2}\right)+\left(\frac{e^{i\alpha}+e^{-i\alpha}}{2}\right)\left(\frac{e^{i\beta}-e^{-i\beta}}{2i}\right)=$$

$$=\frac{e^{i(\alpha+\beta)}\cancel{+e^{i(\alpha-\beta)}}\cancel{-e^{-i(\alpha-\beta)}}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i}+\frac{e^{i(\alpha+\beta)}\cancel{-e^{i(\alpha-\beta)}}\cancel{+e^{-i(\alpha-\beta)}}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{4i}=\frac{e^{i(\alpha+\beta)}-e^{-i(\alpha+\beta)}}{2i}=\sin(\alpha+\beta)$$

(a) $f(x) = \cos(x)$

$$f'(x) = -\sin(x) \quad ; \quad f''(x) = -\cos(x) \tag{1}$$

$$\Rightarrow f(x) \simeq 1 - \frac{x^2}{2} \tag{2}$$

(b) $f(x) = \ln(1+x)$

$$f'(x) = \frac{1}{1+x} \quad ; \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2} \tag{3}$$

$$\Rightarrow f(x) \simeq x - \frac{x^2}{2} \tag{4}$$

(c) $f(x) = \frac{1}{(a+bx^2)^{3/2}}$

$$f'(x) = -\frac{3bx}{(a+bx^2)^{5/2}} \quad ; \quad f''(x) = -\frac{3b(a-4bx^2)}{(a+bx^2)^{7/2}} \tag{5}$$

$$\Rightarrow f(x) \simeq \frac{1}{a^{3/2}} - \frac{3bx^2}{2a^{5/2}} \tag{6}$$