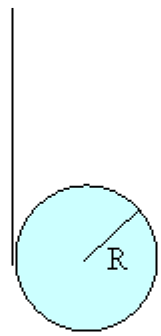
פתרון תרגיל 6409 1:



משוואת כוחות:

$$\sum F_y = ma = mg - T$$

משוואת מומנטים סביב מרכז המסה (נבחר את כיוון השעון ככיוון חיובי):

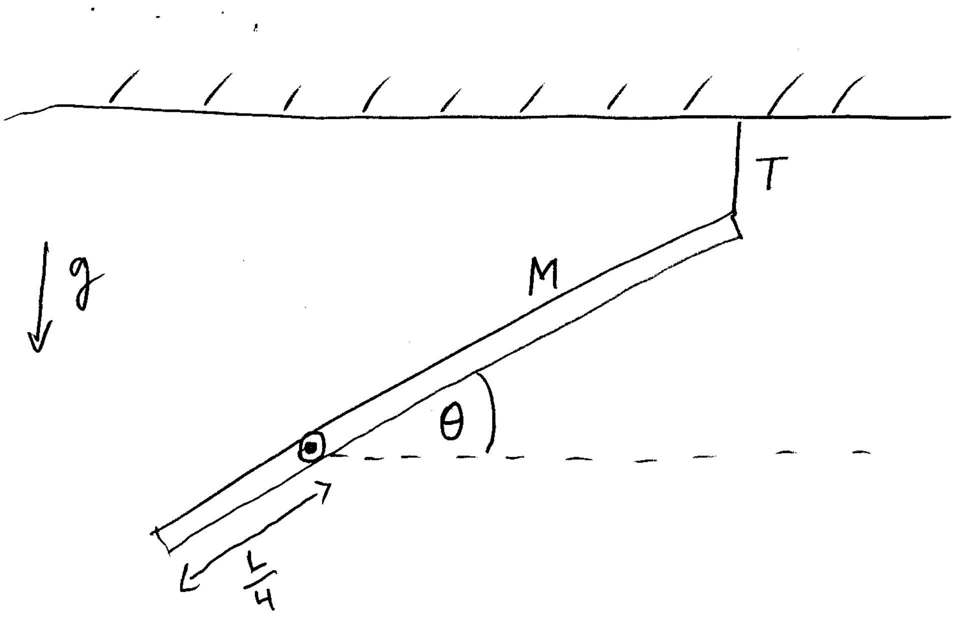
$$\sum \tau = I\alpha = TR$$

נפתור שתי משוואות בשני נעלמים, יחד עם הקשר $a = \alpha R$ הנובע מהעובדה שהיויו מתגלגל ללא החלקה ונקבל לבסוף:

$$\boxed{T = \frac{mgI}{I + mR^2}; a = \frac{mgR^2}{I + mR^2}}$$

מוט דק ואחיד שמסתו $M=5kg$ ואורכו $L=2m$ מקובע לציר
אידאלי ומוחזק בשיווי משקל בזווית θ ביחס לאופק ע"י חוט
הקשור לקצהו. החוט אידאלי וקשור אנכית לתקרה.
גוזרים את החוט והמוט מתחיל להסתובב סביב הציר.

א. מהי המתיחות בחוט לפני גזירתו?
ב. מצאו ביטוי לגודל התאוצה הזוויתית של המוט כתלות ב-θ.
ג. מהי התאוצה המשיקית המקסימלית של מרכז המסה?
ד. מהי המהירות המשיקית המקסימלית אליה תגיע מרכז המסה במהלך תנועת המוט?



פתרון

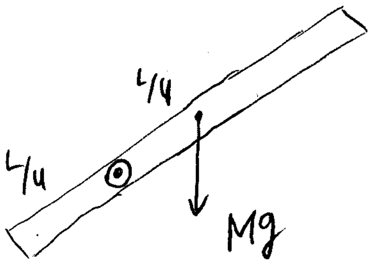
א. כאשר המוט קיים במצב סטטי ולא מסתובב.
נרשום את שיקול המומנטים על הגוף ביחס לנקודת הציר.

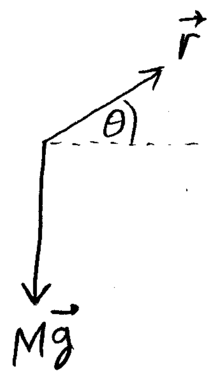
<u>המומנט שמפעיל כח הכובד:</u>

ניתן לצמצם לגבי הפעלת הכח על נקודת מרכז המסה בלבד. מרחקה מהציר הוא $L/4$ ולכן המומנט "יתן ע"י

$\vec{\tau}_g = \vec{r} \times M\vec{g}$ $\quad$ $\tau_g = rMg\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{L}{4}Mg\cos(-\theta) = \frac{MgL}{4}\cos\theta$

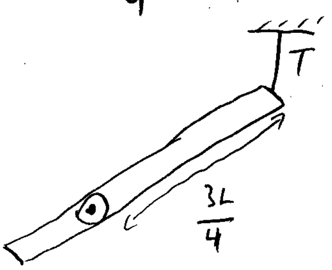
גודל המומנט

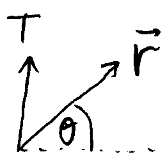




<u>המומנט שמפעיל המוט:</u>

המוט מחובר במרחק $\frac{3L}{4}$ מנקודת הציר ולכן מפעיל מומנט:





$\vec{\tau}_T = \vec{r} \times \vec{T}$ $\quad$ $\tau_T = \frac{3L}{4}T\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = \frac{3LT}{4}\cos\theta$

מאחר והמוט לא מסתובב שקול המומנטים הוא 0: $\frac{MgL}{4}\cos\theta = \frac{3LT}{4}\cos\theta$

ולכן $\boxed{T = \frac{1}{3}Mg}$

ג. כאשר המוט על קיר קיים רק המומנט של כח הכובד:

$$\tau_g = \frac{MgL}{4}\cos\theta$$

מומנט ההתמד של מוט ביחס לציר העובר דרך מרכז המסה ניתן ע"י:

$$I_{cm} = \int_{-L/2}^{L/2} \frac{M}{L}dx \cdot x^2 = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}\Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{ML^2}{12}$$

לפי משפט שטיינר, מומנט ההתמד ביחס לציר מקביל העובר בנקודה המרוחקת $\frac{L}{4}$ ממרכז המסה הוא:

$$I = I_{cm} + M\cdot\left(\frac{L}{4}\right)^2 = \frac{ML^2}{12} + \frac{ML^2}{16} = ML^2\left(\frac{4}{48} + \frac{3}{48}\right) = \frac{7}{48}ML^2$$

המשואה הזוויתית ניתנת ע"י הקשר

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{MgL}{4}\cos\theta = \frac{7}{48}ML^2\alpha$$

$$\boxed{\alpha = \frac{12}{7}\frac{g}{L}\cos\theta}$$

ג. תאוצת מרכז המסה נתונה ע"י

$$a_{CM} = \alpha \cdot \frac{L}{4} = \frac{3}{7} g\cos\theta$$

α – התאוצה הזוויתית
$\frac{L}{4}$ – מרחק מרכז המסה מהציר

התאוצה המקסימלית מתקבלת כאשר $\theta=0$, וגודלה יהיה

$$\boxed{a_{cm\text{-}max} = \frac{3}{7}g}$$

ד. נפתור סעיף זה לפי שימור אנרגיה.
נבחר את נקודת הייחוס 0 בגובה הציר, ונרשום את האנרגיה הפוטנציאלית בשני מצבים:

בהתחלה

במצב אנכי - בו המהירות הזוויתית מקסימלית

$$U_g = Mg\frac{L}{4}\sin\theta$$

$$U_g = -Mg\frac{L}{4}$$

הפרש האנרגיות הפוטנציאליות מתורגם לאנרגיה סיבובית. לפי שימור אנרגיה:

$$Mg\frac{L}{4}\sin\theta = -Mg\frac{L}{4} + \frac{1}{2}I\omega^2$$

$$\omega^2 = \frac{MgL}{2I}(1+\sin\theta) = \frac{MgL}{2}\cdot\frac{48}{7ML^2}(1+\sin\theta) = \frac{24}{7}\frac{g}{L}(1+\sin\theta)$$ ולכן

מכאן נסיק $\omega = \sqrt{\frac{24g}{7L}(1+\sin\theta)}$ ולכן המהירות המשיקית

$$\boxed{v_{CM} = \omega\cdot\frac{L}{4} = \sqrt{\frac{3}{14}gL(1+\sin\theta)}}$$