

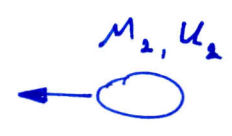
תרגיל III:

2 כדורים נעים לכיוון הימני במהירות

במהירות u_1 ומהירות u_2 (ראו תמונה).

(1) מהי מהירות הכדורים לאחר ההתנגשות?

(2) מהי מהירות המרכז המסה לאחר ההתנגשות?



$m_1 = 0.2 \text{ kg}$

$u_1 = 1.5 \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$m_2 = 0.3 \text{ kg}$

$u_2 = -0.4 \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

פתרון:

(1) נשמר המomentum במיקוד גורם נגזרים:

(I) $m_1 u_1 + m_2 u_2 = m_1 v_1 + m_2 v_2$

(II) $\frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2$

(I) $\Rightarrow 0.18 = 0.2 v_1 + 0.3 v_2 \Rightarrow v_1 = 0.9 - 1.5 v_2$

(II) $\Rightarrow 0.498 = 0.2 v_1^2 + 0.3 v_2^2$

נקודה לשלילה חיובית

$0.75 v_2^2 - 0.54 v_2 - 0.336 = 0$

לפי משוואת הריבועים

$v_2(1) = 1.12 \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$
 $v_2(2) = -0.4 \hat{i} \frac{\text{m}}{\text{s}}$

הפרקן השני הינו מתיחה בעל עיני ההתנהגות

בין הפרקן שנקרא יהיה הפרקן הישן.

* נציב מחדש את עקב V_1

$$V_1 = 0.9 - 1.5 \cdot 1.12 = -0.78 \hat{m} \frac{1}{s}$$

(2) מתיחה מרכז המסה נגד עיני

$$V_{c.m.} = \frac{\sum_i V_i M_i}{\sum_i M_i}$$

$$V_{c.m.} = \frac{0.2 \cdot 1.5 - 0.4 \cdot 0.3}{0.2 + 0.3} = 0.36 \hat{m} \frac{1}{s} \quad \text{לפני:}$$

$$V_{c.m.} = \frac{0.2 \cdot (-0.78) + 0.3 \cdot 1.12}{0.2 + 0.3} = 0.36 \hat{m} \frac{1}{s} \quad \text{אחרי}$$

כמות המסה פואים קר על אורח

המסה המרכז המסה ירדה במרכז

המסה המסה ירדה במרכז

בין האסים!

התנגשות אלסטית של גופים זהים במסתם

אין כוחות חיצוניים, ולכן התנע נשמר. בנוסף, נתון כי ההתנגשות אלסטית, כלומר גם האנרגיה נשמרת. קיבלנו שתי משוואות:

$$M\vec{V}_0 = M\vec{V}_1 + M\vec{V}_2$$
$$\frac{1}{2}M\vec{V}_0^2 = \frac{1}{2}M\vec{V}_1^2 + \frac{1}{2}M\vec{V}_2^2$$

נעלה את המשוואה הראשונה בריבוע (תוך כדי ביטול ה- M בשני האגפים):

$$\vec{V}_0^2 = (\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2$$

נציב את התוצאה שקיבלנו במשוואת האנרגיה (תוך ביטול ה- $\frac{M}{2}$ בשני האגפים):

$$(\vec{V}_1 + \vec{V}_2)^2 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2$$
$$\vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2 + 2\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = \vec{V}_1^2 + \vec{V}_2^2$$
$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$$

בסעיף א, ההתנגשות חזיתית, כלומר הוקטורים באותו כיוון. האופציה היחידה לאיפוס היא אם $V_1 = 0$.
בסעיף ב, ההתנגשות אינה חזיתית. במצב הזה, כדי לאפס את $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2$, הוקטורים צריכים להיות מאונכים, כלומר בזווית של 90 מעלות. ($\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = |V_1||V_2|\cos(\theta)$)

ירי בצלחות חרס.

נתמודד עם השאלה הזו בשיטת הפרד ומשול. בשלב הראשון נברר את המצב רגע לפני ההתנגשות, אחר כך נחשב את ההתנגשות, ואז את התנועה שאחרי ההתנגשות. נתחיל מבירור המצב רגע לפני ההתנגשות. המהירות הראשונית של הצלחת היא:

$$v_0 = 108 \frac{km}{hr} = 108 \frac{1000m}{3600s} = 30 \frac{m}{s}$$
$$v_{0x} = v_0 \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} 30 \frac{m}{s}$$
$$v_{0y} = v_0 \sin \theta = \frac{1}{2} 30 \frac{m}{s} = 15 \frac{m}{s}$$

ההתנגשות מתרחשת בשיא הגובה, כאשר המהירות בציר y היא אפס:

$$v_y(t) = v_{0y} + at = v_{0y} - gt = 0$$
$$t_1 = \frac{v_{0y}}{g} = \frac{15 \frac{m}{s}}{10 \frac{m}{s^2}} = 1.5s$$

נציב את הביטוי לזמן ונקבל את גובה ההתנגשות:

$$y_1 = y_0 + v_{0y}t + \frac{at^2}{2} = v_{0y}t - \frac{g}{2}t^2 = v_{0y} \left(\frac{v_{0y}}{g} \right) - \frac{g}{2} \left(\frac{v_{0y}}{g} \right)^2 = \frac{v_{0y}^2}{2g} = \frac{225 \frac{m^2}{s^2}}{20 \frac{m}{s^2}} = 11.25m$$

מיקום הצלחת בציר x בהתנגשות היא:

$$x_1 = x_0 + v_{0x}t = \frac{\sqrt{3}}{2} 30 \frac{m}{s} 1.5s = \frac{\sqrt{3} \cdot 45}{2} m \approx 38.97m$$

עכשיו אנחנו מוכנים להתמודד עם ההתנגשות. ברגע ההתנגשות עצמה, התנע נשמר. בציר x נקבל:

$$m_1 v_1 + m_2 \cdot 0 = (m_1 + m_2) v_{2x}$$
$$v_{2x} = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{0.25kg}{0.25kg + 0.015kg} v_1 \approx 24.51 \frac{m}{s}$$

בציר y נקבל:

$$m_1 \cdot 0 + m_2 u_1 = (m_1 + m_2) v_{2y}$$
$$v_{2y} = \frac{m_2}{m_1 + m_2} u_1 = \frac{0.015kg}{0.25kg + 0.015kg} 200 \frac{m}{s} \approx 11.32 \frac{m}{s}$$

אחרי שסיימנו לחשב את המהירות שלאחר ההתנגשות, יש לנו בעצם שאלה חדשה. נתון בה גוף, בגובה $y_2 = 11.25m$, ולו מהירות התחלתית $v_2 = v_{2x} \hat{i} + v_{2y} \hat{j} \approx 24.51 \frac{m}{s} \hat{i} + 11.32 \frac{m}{s} \hat{j}$. ושואלים מה הגובה אליו הגוף יגיע, ומה המרחק האופקי עד ההגעה לקרקע. חישוב הגובה הוא פשוט:

$$y_3 = y_2 + \frac{v_{2y}^2}{2g} \approx 11.25m + \frac{(11.32 \frac{m}{s})^2}{2 \cdot 10 \frac{m}{s^2}} \approx 17.66m$$

אבל שאלו על תוספת הגובה:

$$\Delta h = y_3 - y_2 = 6.41m$$

בשביל חישוב המרחק נזדקק קודם למצוא את הזמן עד הפגיעה בקרקע:

$$y_4 = y_2 + v_{2y}t - g\frac{t^2}{2} = 0$$

$$11.25m + 11.32\frac{m}{s}t - 5\frac{m}{s^2}t^2 = 0$$

$$t_{\pm} = \frac{11.32\frac{m}{s} \pm \sqrt{11.32^2\frac{m^2}{s^2} + 4 \cdot 11.25m \cdot 5\frac{m}{s^2}}}{10\frac{m}{s^2}} = 1.13s \pm 1.88s$$

$$t_+ = 3.01s$$

כאשר בחרנו את התשובה בפלוס מכיוון שהיא מייצגת את הפגיעה בקרקע אחרי ההתנגשות. ניתן להציב את הזמן הזה בנוסחה למיקום בציר x :

$$x_4 = x_2 + v_{2x}t = 38.97m + 24.51\frac{m}{s} \cdot 3.01s = 112.75m$$

אם לא הייתה כל התנגשות, המרחק היה $2 \cdot x_2$. ולכן ההפרש הוא:

$$\Delta x = x_4 - 2x_2 \approx 35m$$

מדידת דוברים בשנתם

כפי שהציר המצורף לשאלה רומז, הפתרון מבוסס על מרכז המסה. בהעדר כוחות חיצוניים, מרכז המסה של מערכת החוקרת + דוב נשאר במקומו. החוקרת קושרת חבל לדוב, ומחזיקה את קצהו השני. כמו כן, היא מסמנת את מיקומה הנוכחי על הקרח. אם נסמן את ראשית הצירים במרכז המסה, נוכל למצוא את קשר בין מרחק החוקרת ממרכז המסה למרחק הדוב ממרכז המסה:

$$\frac{m_p(-x_p) + m_b x_b}{m_p + m_b} = 0$$
$$m_p x_p = m_b x_b$$

מין הסתם, החוקרת לא יודעת בתחילה איפה נמצא מרכז המסה, ולכן המשוואה הזו לבדה לא עוזרת לה. השיטה היא למשוך קצת בחבל, ולמדוד את השינוי במיקום שלה ושל הדוב (ניתן למדוד את שלה ואת אורך החבל ולהסיק את השינוי במיקום הדוב אם רוצים). נסמן את המיקום החדש של החוקרת $\tilde{x}_p = x_p + \Delta x_p$, ואת המיקום החדש של הדוב ב: $\tilde{x}_b = x_b + \Delta x_b$. אמרנו שהיחס צריך לעבוד תמיד, ולכן נוכל להציב את המרחקים החדשים:

$$m_p \tilde{x}_p = m_b \tilde{x}_b$$
$$m_p x_p + m_p \Delta x_p = m_b x_b + m_b \Delta x_b$$

נחסר ממשוואה זו את המשוואה שהייתה לנו למיקומים ההתחלתיים לקבל:

$$m_p \Delta x_p = m_b \Delta x_b$$
$$m_b = m_p \frac{\Delta x_p}{\Delta x_b}$$

כך, על ידי מדידת השינוי במיקום החוקרת והדוב, ניתן לגלות את מסת הדוב. כאשר יש חיכוך במשטח, יש כוחות חיצוניים, ולכן התנע לא ישמר, ומרכז המסה בהחלט יכול לזוז.

מרכז מסה

במקרה שלפנינו, בחרו בשבילנו את מערכת הצירים. לכן כל שצריך לעשות זה להציב בנוסחה:

$$\begin{aligned} \vec{R}_{cm} &= \frac{\sum_i m_i \vec{r}_i}{\sum_i m_i} = \frac{3kg \cdot 0 + 4kg \cdot (2m\hat{i} + 1m\hat{j}) + 8kg \cdot (1m\hat{i} + 2m\hat{j})}{3kg + 4kg + 8kg} \\ &= \frac{16 \cdot kg \cdot m\hat{i} + 20 \cdot kg \cdot m\hat{j}}{15kg} \\ &= \frac{16}{15}m\hat{i} + \frac{4}{3}m\hat{j} \end{aligned}$$

כמובן שכמו בכל חיבור וקטורי, ניתן לעשות זאת ברכיבים למי שמרגיש יותר בנוח עם זה:

$$\begin{aligned} X_{cm} &= \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} = \frac{3kg \cdot 0 + 4kg \cdot 2m + 8kg \cdot 1m}{3kg + 4kg + 8kg} \\ &= \frac{16}{15}m \\ Y_{cm} &= \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} = \frac{3kg \cdot 0 + 4kg \cdot 1m + 8kg \cdot 2m}{3kg + 4kg + 8kg} \\ &= \frac{4}{3}m \end{aligned}$$