נתונים:

- $R_H = 0.15m$
- $R_M = 0.30m$

מטעמי נוחות, לאורך כל השאלה נמדוד את הזווית עם כיוון השעון, בניגוד למקובל בפיסיקה. תשובה עם מינוסים בכל המהירויות היא נכונה באותה מידה.

א. על מחוג הדקות להשלים סיבוב תוך 60 דקות או 3600 שניות, ולכן מהירותו הזויתית:

$$\omega_M = \frac{2\pi}{3600}\frac{1}{sec} \approx 1.745\cdot 10^{-3}\frac{1}{sec}$$

או,

$$\omega_M = \frac{360}{3600}\frac{degrees}{sec} = \frac{1}{10}\frac{degrees}{sec}$$

[הרשנו לעצמנו להתשמש במעלות בגלל האופי המיוחד מאוד של השאלה. ככלל, לא מומלץ להשתמש במעלות, אלא רק בראדיאנים!]

ומהירותו המשיקית (חשוב להשתמש במהירות הזויתית הראשונה, בראדיאנים)

$$v = \omega_M R_M = \frac{2\pi 0.30}{3600}\frac{m}{sec} \approx 5.236\cdot 10^{-4}\frac{m}{sec}$$

על מחוג השעות להשלים סיבוב תוך 12 שעות או 43200 שניות, ולכן מהירותו הזויתית:

$$\omega_H = \frac{2\pi}{43200}\frac{1}{sec} \approx 1.454\cdot 10^{-4}\frac{1}{sec}$$

או,

$$\omega_H = \frac{360}{12\cdot 3600}\frac{degrees}{sec} = \frac{1}{120}\frac{degrees}{sec}$$

ומהירותו המשיקית:

$$v = \omega_H R_H = \frac{2\pi 0.15}{43200}\frac{m}{sec} \approx 2.182\cdot 10^{-5}\frac{m}{sec}$$

ב. ר' סיים לכוון את השעון בשעה 14:50. נמיר את זה למעלות.

מחוג הדקות נמצא כאמור ב50 מתוך 60, כלומר:

$$\theta_M = \frac{50}{60}\cdot 360 = 300$$

ומחוג השעות נמצא ב2 ועוד חמישים דקות, מתוך 12:

$$\theta_H = \frac{2+\frac{50}{60}}{12}\cdot 360 = 85$$

תנועת המחוגים היא במהירות זויתית קבועה, ולכן, משוואת הזווית כפונקציה של הזמן תהיה:

$$\theta_M(t) = 300degrees + \frac{1}{10}\frac{degrees}{sec}t$$

$$\theta_H(t) = 85degrees + \frac{1}{120}\frac{degrees}{sec}t$$

בסיבוב הנוכחי מחוג הדקות כבר מקדים את השעות, לכן הם יפגשו כשזווית מחוג הדקות פחות 360 תהיה שווה לזווית מחוג השעות (כלומר בסיבוב הבא).

$$\theta_M(t) - 360degrees = \theta_H$$

$$300degrees + \frac{1}{10}\frac{degrees}{sec}t - 360degrees = 85degrees + \frac{1}{120}\frac{degrees}{sec}t$$

$$t \approx 1582seconds$$

הזווית שהמחוג יעבור היא המהירות הזויתית כפול הזמן, כלומר:

$$\theta_M(t) = \frac{1}{10}\frac{degrees}{sec}\cdot t \approx 158.1818degrees$$

ג. בנקודת המפגש אנחנו בזווית $158.1818 - 60 = 98.1818$ מעלות. בשעה 15:45 מחוג הדקות יהיה בזווית

$$\frac{45}{60}\cdot 360 = 270$$

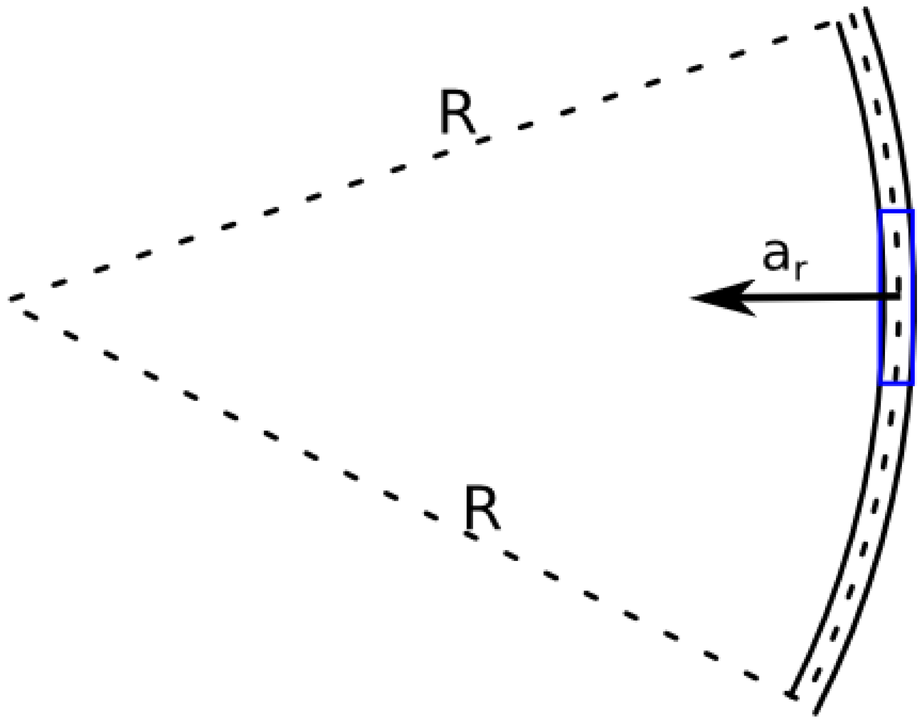
המרחק שקצה המחוג יעבור הוא הרדיוס כפול הפרש הזוויות בראדיאנים, כלומר:

$$d = (270 - 98.1818)\frac{2\pi}{360}0.3m \approx 0.9m$$

נתונים:
המסה שעל השולחן m
המסה שתלויה M
אורך החוט r (מקבל ערכים בסעיפים השונים)

נתון כי המסה שתלויה היא במנוחה, ולכן:
$$T-Mg=0\Rightarrow T=Mg$$
המסה המסתובבת מאיצה בכיוון הרדיאלי, והכוח היחיד בכיוון זה הוא T, ולכן:
$$T=m\omega^2r$$
ולכן המהירות הזוויתית הדרושה על מנת לשמור על המסה התחתונה במנוחה היא:
$$\omega=\sqrt{\frac{Mg}{mr}}$$
והמהירות המשיקית הדרושה:
$$v=\omega r=\sqrt{\frac{Mgr}{m}}$$
הקטנת הרדיוס תגדיל את ω, אבל תקטין את v.

1. נשרטט את העיקול שעליו נוסעת הרכבת:



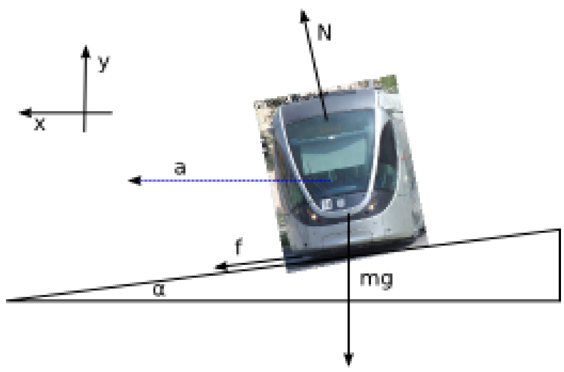
האות R מסמלת את רדיוס הסיבוב. התאוצה היא התאוצה הרדיאלית. על מנת שהיא תפחת מ0.05g , נדרוש:

$$\frac{V^2}{R} \leq 0.05g$$

$$R \geq \frac{V^2}{0.05g}$$

$$R \geq \frac{\left(310\frac{KM}{H}\cdot\frac{1\frac{m}{s}}{3.6\frac{KM}{H}}\right)^2}{0.05\cdot 9.8\frac{m}{s^2}} \approx 15km$$

2. נכין תרשים כוחות:



כאשר בכחול מקוקוו התאוצה הרדיאלית של הרכבת. יש לשים לב שסימנו את החיכוך פועל לכיוון מטה, אבל אנחנו עוד לא יודעים את כיוונו (זה תלוי בזווית), ולכן נרשום בהמשך שסימן החיכוך המקסימלי הוא פלוס/מינוס.
נרשום את משוואות הכוחות עבור הצירים x ו y:

$$\begin{cases} \sum F_y = N\cos\alpha - mg - f\sin\alpha = 0 \\ \sum F_x = N\sin\alpha + f\cos\alpha = ma_r = m\frac{V^2}{R} \end{cases}$$

נציב את החיכוך המקסימלי, ונוציא את הקוסינוס כמכנה משותף:

$$\begin{cases} N\cos\alpha(1\pm\mu\tan\alpha)=mg \\ N\cos\alpha(\pm\mu+\tan\alpha)=m\frac{V^2}{R} \end{cases}$$

נחלק את המשוואות:

$$\frac{(1\pm\mu\tan\alpha)}{\pm\mu+\tan\alpha}=\frac{g}{\frac{V^2}{R}}$$

כפל שני הצדדים במכנה של צד שמאל, וקיבוץ איברים, ייתן לנו:

$$\tan\alpha=\frac{\frac{V^2}{gR}\mp\mu}{1\pm\mu\frac{V^2}{gR}}$$

נציב את הנתונים, כשR הוא 3000 מטרים, המהירות כ86 מטר לשניה, מקדם החיכוך 0.6, וכמובן תאוצת הכובד g היא 9.8 מטר לשנייה בריבוע:

$$\tan\alpha_1=\frac{\frac{86.111^2}{9.8\cdot3000}-0.6}{1+0.6\frac{86.111^2}{9.8\cdot3000}}\approx-0.31$$

$$\tan\alpha_2=\frac{\frac{86.111^2}{9.8\cdot3000}+0.6}{1-0.6\frac{86.111^2}{9.8\cdot3000}}\approx1.00$$

תחום הזוויות הזה מאפשר נסיעה של הרכבת בלי החלקה לצדדים. למעשה, הזווית 0 גם נכללת בתחום הזה. לכן אין צורך בזווית עם מקדם חיכוך כזה גבוה. (מומלץ לבדוק האם במצב של זווית 0 החיכוך מספיק על מנת לגרום לתנועה המעגלית).

מטוטלת מעגלית

א. הכוחות הפועלים על הגוף הם הכבידה והמתיחות. נבנה מערכת צירים בה y מעלה, וx ימינה. במערכת זו הכוחות הם:

$$\sum \vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T\sin\alpha \\ T\cos\alpha - mg \end{pmatrix}$$

הגוף מסתובב בתדירות f , כלומר f פעמים בשניה הוא עושה סיבוב של 2π. אם כך, התדירות הזוויתית שלו היא $\omega = 2\pi f$. רדיוס הסיבוב של הגוף הוא כמובן $R = L\sin\alpha$. לכן התאוצה של הגוף היא $a = \begin{pmatrix} \omega^2 R \\ 0 \end{pmatrix}$.

לכן:

$$\begin{pmatrix} T\sin\alpha \\ T\cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} m\omega^2 L\sin\alpha \\ mg \end{pmatrix}$$

חלוקת המשוואה השניה בראשונה תתן:

$$\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}$$

ב. גובה החוט הוא :

$$h = L\cos\alpha = L\frac{g}{L\omega^2} = \frac{g}{\omega^2}$$

כלומר גובה החוט כלל לא תלוי באורך. ככל שיוארך החוט, הגוף ינוע במעגל רחב יותר.

ג. המתיחות כתלות בזווית היא:

$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$

כלומר בשביל זווית 90 וקוסינוס 0, (כשהמסה לא שווה אפס גם כן), צריך מתיחות אינסופית, לכן זה לא יכול להתרחש.