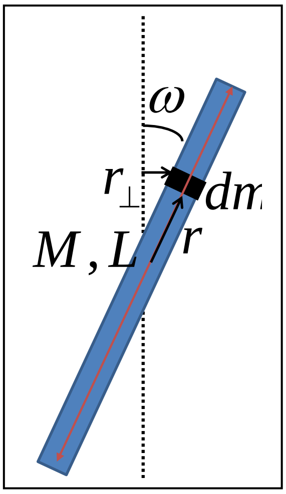
השאלה:



חשבו מומנט התמד לסיבוב של מוט דק ואחיד במסה M ובאורך L סביב ציר העובר במרכזו והנטוי בזוית α ביחס אליו.

הפתרון:

מונמט ההתמד מחושב על ידי האינטגרל $I = \int_{r\min}^{r\max} r_\perp^2 dm$ כאשר $r_\perp$ הוא המרחק של אלמנט המסה dm מציר הסיבוב, כש ש: $r_\perp^2 = r^2 \sin^2(\alpha)$. למוט צפיפות אחידה, כך שניתן להגדיר $\lambda = m/L = dm/dr$. מומנט ההתמד הוא אם כן: $I = \int_{r\min}^{r\max} r_\perp^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \sin^2(\alpha)\lambda dr = \lambda \sin^2(\alpha) \left.\frac{r^3}{3}\right|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \lambda \sin^2(\alpha)\frac{L^3}{12}$

נציג את הפתרון עם נתוני השאלה בלבד: $I = \frac{ML^2}{12}\sin^2(\alpha)$, מצאנו שמומנט ההתמד המתוקן מקבל פקטור $\sin^2$ ביחס למומנט ההתמד שמקביל לציר.

Solution – The Seven Coins:

The moment of inertia is additive, hence we need to calculate the moment of inertia separately for each coin (around the required axis) and simply add.

Starting with the central coin:

$$I_{central} = \int r_{\perp}^2 dm = \left\{ \sigma = \frac{m}{\pi R^2} \right\} = \sigma \int_0^R r^2 r dr \int_0^{2\pi} d\varphi = \frac{1}{2} mR^2$$

And then, using the perpendicular axes theorem for the other coins:

$$I_{outer} = \frac{1}{2} mR^2 + m(2R)^2$$

So finally-

$$I_{tot} = I_{central} + 6I_{outer} = \frac{7}{2} mR^2 + 6m(2R)^2 = \boxed{\frac{55}{2} mR^2}$$

מוט מחליק

הגוף שלנו לא מחליק, כלומר הוא אינו זז בכלל. נתחיל מלרשום את משוואת הכוחות בשני הצירים:

$$\sum F_x = N - T\sin\beta = 0$$
$$\sum F_y = T\cos\beta + f - mg = 0$$
$$\Downarrow$$
$$N\cot\beta + f - mg = 0$$

נוסיף לתערובת ביטוי על המומנטים , כאשר נבחר את הציר להיות הקצה הימני של המוט. המטרה בבחירה זו היא לא להוסיף עוד פעם את המתיחות למשוואות. נקבל:

$$mg\frac{L}{2}\sin\beta - fL\sin\beta + NL\cos\beta = 0$$
$$mg - 2f + 2N\cot\beta = 0$$

חיבור משוואה זו עם המשוואה שקיבלנו מהכוחות, נותן:

$$N\cot\beta + f - mg + mg - 2f + 2N\cot\beta = 0$$
$$f = 3N\cot\beta \leq \mu N$$
$$\mu \geq 3\cot\beta$$

וזה הפתרון.

כמובן שאפשר לפתור את השאלה גם סביב ציר אחר, בחירה פופולרית למשל תהיה סביב הקצה השמאלי של המוט. משם נקבל:

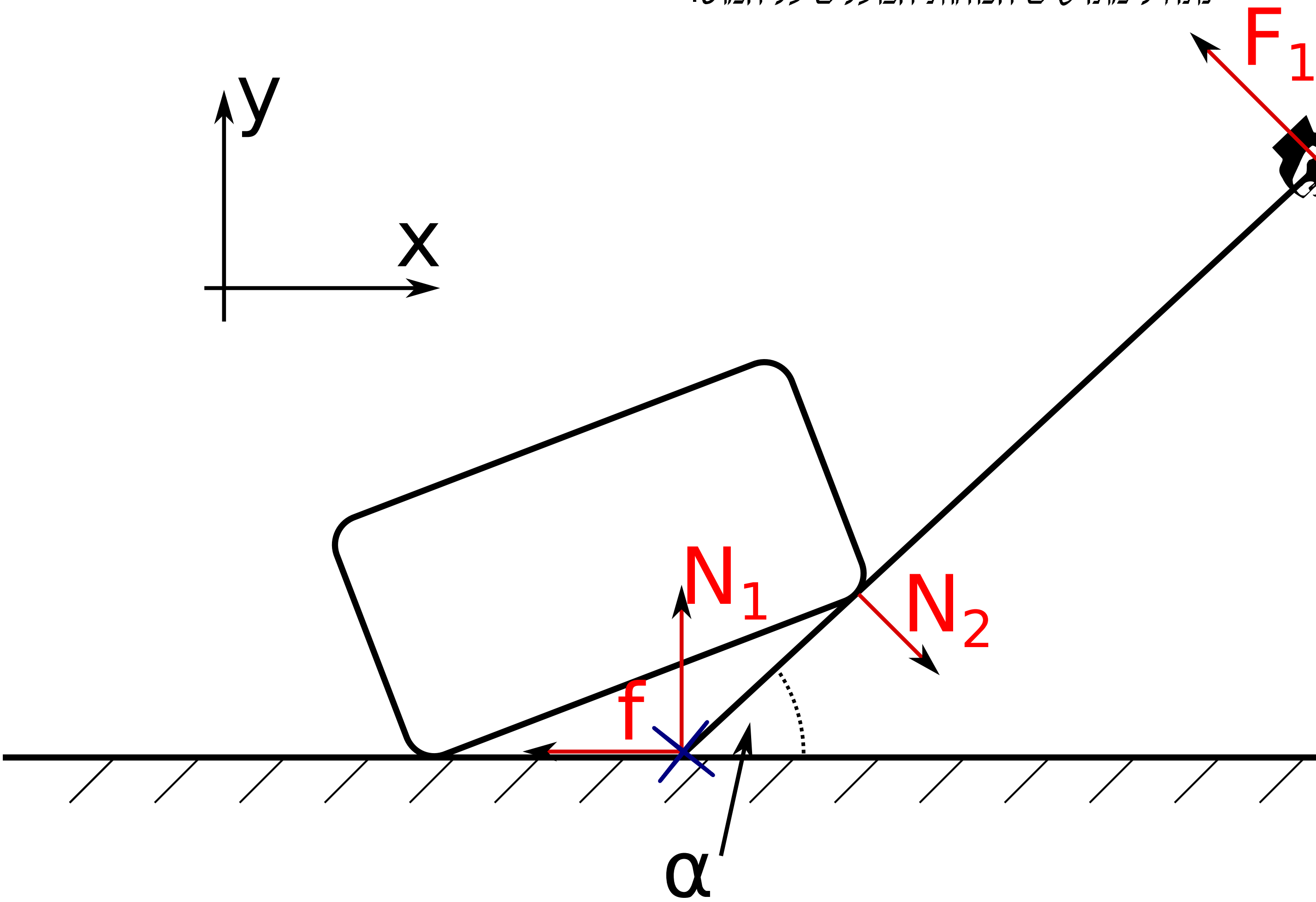
$$mg\frac{L}{2}\sin\beta - TL\sin 2\beta = 0$$

$$mg = 4T\cos\beta$$

והצבה של זה בביטויים של הכוח תחזיר אותנו לאותה התשובה כמובן.

הרמת קופסאות

נתחיל מתרשים הכוחות הפועלים על המוט:



המערכת במנוחה, ולכן ידוע שסכום המומנטים מתאפס. נבחר כנקודת ציר את נקודת המגע עם הרצפה, ונחשב את המומנטים. נתון לנו שנקודת המגע של הפינה הימנית של הקופסא היא ברבע מאורך המוט. נסמן את אורך המוט בL ונקבל את סכום המומנטים:

$$\sum \tau = F_1 L - N_2 \frac{L}{4} = 0$$
$$F_1 L = N_2 \frac{L}{4}$$
$$N_2 = 4F_1$$

וקיבלנו שהכוח הפועל על הפינה הימנית של הקופסא הוא פי 4 מהכוח אותו אנחנו מפעילים. זו דוגמא ל"מכונה פשוטה" (חפשו בויקיפדיה), שעוזרת מאוד בביצוע מטלות. שימו לב שהעבודה שנעשית (אינטגרל על כוח כפול דרך) זהה כמובן. לא ניתן להרוויח אנרגיה מכלום, אבל ניתן להפעיל פחות כוח על דרך ארוכה יותר.

בשביל הכוח שהמוט מפעיל על הרצפה נוסיף את משוואות הכוחות בשני הצירים:

$$F_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha + N = 0$$
$$-F_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - f = 0$$

נקבל מיידית:

$$N = N_2 \cos\alpha - F_1 \cos\alpha = 4F_1 \cos\alpha - F_1 \cos 2\alpha = 3F_1 \cos\alpha$$

בשביל לקבל את החיכוך, נעזר בתנאי על חיכוך סטטי, יחד עם משוואת הכוחות בציר x:

$$
\begin{aligned}
f &\le \mu_s N \\
f &= -F_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha = -F_1 \sin\alpha + 4F_1 \sin\alpha = 3F_1 \sin\alpha \\
&= N \tan\alpha \\
N \tan\alpha &\le \mu_s N \\
\mu_s &\ge \tan\alpha
\end{aligned}
$$

כאשר בדרך הצבנו $3F_1 \cos\alpha = N$.

קיבלנו תנאי על מקדם החיכוך שתלוי רק בזווית המוט.

גשר על מים סוערים

משוואת הכוחות על הגשר נותנת לנו:

$$T_R + T_L - N - m_B g = 0$$

משוואת הכוחות על הילד נותנת לנו:

$$N - m_c g = 0$$

חיבור של המשוואות יתן:

$$T_R + T_L - m_c g - m_B g = 0$$

נחשב את המומנטים, ביחס לציר שעובר במרכז הגשר, כאשר נסמן את מיקום הנער בx:

$$T_R \frac{L}{2} - Nx - T_L \frac{L}{2} = 0$$
$$T_R \frac{L}{2} - m_c g x - T_L \frac{L}{2} = 0$$
$$T_R - T_L - 2m_c g \frac{x}{L} = 0$$

כדי למצוא את הגבלות התנועה על הנער, פעם נחבר את המשוואות לקבלת הגבול על המתיחות מימין, ופעם נחסר בשביל הגבול על המתיחות משמאל:

$$2T_R - m_B g - m_c g \left(2\frac{x}{L} + 1\right) = 0$$
$$T_R = \frac{m_B g}{2} + \frac{m_c g}{2}\left(2\frac{x}{L} + 1\right) \le T_{R_{\text{מקס}}}$$
$$m_c g \frac{x}{L} \le T_{R_{\text{מקס}}} - \frac{m_B g}{2} - \frac{m_c g}{2}$$
$$x \le \left(\frac{T_{R_{\text{מקס}}}}{m_c g} - \frac{m_B}{2m_c} - \frac{1}{2}\right) \cdot L$$
$$x \le \left(\frac{350N}{40kg10\frac{N}{kg}} - \frac{20kg}{80kg} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2m$$
$$x \le 0.25m$$

חיסור המשוואות בעצם אומר להחליף את T_R ב T_L, ואת x ב$-x$:

$$-x \le \left(\frac{T_{L_{\text{מקס}}}}{m_c g} - \frac{m_B}{2m_c} - \frac{1}{2}\right) \cdot L$$
$$x \ge -\left(\frac{400N}{40kg10\frac{N}{kg}} - \frac{20kg}{80kg} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2m$$
$$x \ge -0.5m$$

כלומר $-0.5m \le x \le 0.25m$