חישוב מומנט התמד של מערכת נקודות

מומנט ההתמד מוגדר :

$$I=\sum m_i r_i^2$$

שימו לב שהכוונה היא לציר שניצב לדף.

1. סביב מסה m1:

$$I=\sum m_i r_i^2=m_2 r_2^2+m_3 r_3^2=m_2 L^2+m_3(\sqrt{2}L)^2=\frac{m}{2}L^2+m2L^2=\frac{5}{2}mL^2$$

2. סביב מסה m3:

$$I=\sum m_i r_i^2=m_1 r_1^2+m_2 r_2^2=m_1(\sqrt{2}L)^2+m_2 L^2=\frac{m}{2}2L^2+\frac{m}{2}L^2=\frac{3}{2}mL^2$$

3. על מנת לעבור לציר מקביל העובר דרך מרכז המסה, ניתן להשתמש במשפט שטיינר (זיכרו: המשפט נכון אך ורק למעבר מ/אל מרכז המסה!)
עלינו לברר את המרחק של מרכז המסה מאחד הצירים שכבר חישבנו. קודם כל נברר את מרכז המסה, במערכת הצירים שמופיעה בשאלה. בציר X נקבל:

$$X_{cm}=\frac{m_1 L+m_2 0+m_3 0}{m_1+m_2+m_3}=\frac{\frac{m}{2}L}{2m}=\frac{L}{4}$$

ובציר Y:

$$Y_{cm}=\frac{m_1 0+m_2 0+m_3 L}{m_1+m_2+m_3}=\frac{mL}{2m}=\frac{L}{2}$$

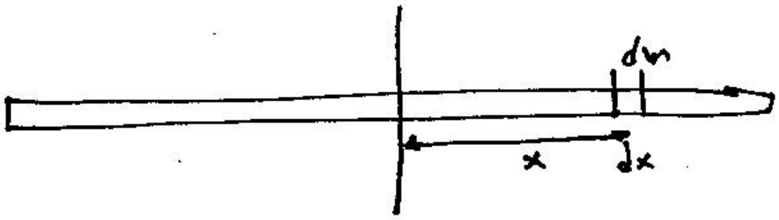
עכשיו נותר לחשב את המרחק (בריבוע) בין מרכז המסה לאחת הנקודות שכבר חישבנו. אבחר את m1:

$$R_{cm\to m_1}^2=(L-\frac{L}{4})^2+\frac{L}{2}^2=\frac{13}{16}L^2$$

ומשפט שטיינר נותן לנו:

$$I_{cm}=I m_1-(m_1+m_2+m_3)R_{cm\to m_1}^2=\frac{5}{2}mL^2-2m\frac{13}{16}L^2=\frac{7}{8}mL^2$$

מומנט התמד של מוט באורך L ומסה M



ציר סיבוב במרכז המוט:

$$I = \int r^2 \, dm \qquad dm = \frac{M}{L} dx$$

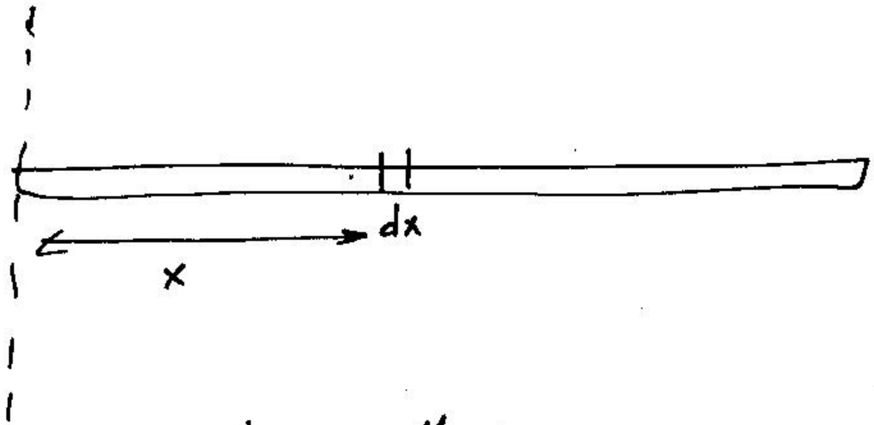
$$I = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{3} x^3 \Big|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}}$$

$$I = \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{3} \left[\left(\frac{L}{2}\right)^3 + \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right]$$

$$I = \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{3} \left[2 \left(\frac{L}{2}\right)^3 \right] = \frac{M}{L} \frac{2}{3} \left(\frac{L^3}{8} \right)$$

$$= \frac{M}{L} \frac{L^3}{12} = \frac{1}{12} M L^2$$

כשה ציר הסיבוב בקצה.



$$dm = \frac{M}{L} \cdot dx$$

$$I = \int_0^L x^2 \frac{M}{L} dx = \frac{M}{L}\frac{1}{3} x^3 \Big|_0^L$$

$$= \frac{M}{L} \cdot \frac{1}{3} L^3 = \frac{1}{3} M L^2$$

סולמות ונחשים

ככל השאלות בסגנון של סטטיקה של גוף קשיח, גם הפעם נדרוש שהגוף הן לא יאיץ קווית (סכום הכוחות יתאפס) והן לא יאיץ סיבובית (סכום המומנטים יתאפס). נסמן את הנורמל עם הקיר ב N_1, ואת הנורמל עם הרצפה N_2.

נסמן את החיכוך שפועל בנקודת המגע עם הרצפה ימינה, ב f.

הכוח האחרון שלא הוזכר הוא mg שפועל ממרכז הסולם כלפי מטה.

נתחיל ממשוואות הכוחות:

$$\sum F_x = f - N_1 = 0$$
$$\sum F_y = N_2 - mg = 0$$

נוסיף לזה את משוואת המומנטים (טורקים). נבחר כנקודת ציר את הפינה השמאלית של הסולם, מכיוון ששם פועלים שני כוחות וזה יקל עלינו. (כמובן שניתן לבחור כל נקודה):

$$mg\frac{L}{2}\cos\alpha - N_1 L\sin\alpha = 0$$
$$mg = 2N_1\tan\alpha$$

נשתמש במשוואה שקיבלנו מהמומנטים במשוואה על ציר y לקבל:

$$N_2 = 2N_1\tan\alpha$$

משוואת הכוחות על ציר x בשילוב עם התנאי של חיכוך סטטי נותנת:

$$f = N_1 \leq \mu N_2$$

ונותר רק להציב את N_2:

$$N_1 \leq \mu N_2 = \mu 2N_1\tan\alpha$$
$$1 \leq \mu 2\tan\alpha$$
$$\arctan\frac{1}{2\mu} \leq \alpha$$

וקיבלנו תנאי מינימלי לאלפה, שכמובן לא כולל את מסת הסולם או אורכו שלא ניתנו לנו בתרגיל.

מפצח האגוזים

נרשום את המומנטים הפועלים עלה הידית העליונה ביחס לציר בנקודת הציר של המפצח. נסמן את המרחק $L = 13cm$ ובהתאם: $\frac{L}{5} = 2.6cm$.

נסמן את הכוח שפועל על האגוז בN, ונקבל עבור הידית העליונה:

$$FL - N\frac{L}{5} = 0$$

או בעצם:

$$N = 5F$$

כלומר הכוח מהידית העליונה בלבד הוא פי חמש מהכוח שפועל על האגוז. בשביל להפעיל $46N$ משני צדי האגוז, די להפעיל $9.2N = \frac{46N}{5}$ משני צדי מפצח האגוזים. מכאן שמפצח האגוזים יעיל פי חמש מהפעלת כוח ישיר. (שוב נדגיש: הכוח פי חמש. העבודה שהוא יעשה לאורך מסלול זהה בדיוק).