גוף נופל על קפיץ

עבודה בהגדרתה שווה ל $W = \int \vec{F} d\vec{r}$. במהלך הכיווץ, הכוחות הפועלים הם כוח הקפיץ כלפי מעלה, וכוח הכובד כלפי מעלה. נבחר מערכת צירים עם קואורדינטה y בכיוון מעלה, כאשר ראשיתה במישור הקפיץ הרפוי. עבודת הכובד היא:

$$W_g = \int_0^{-d} -mgdy = -mgy|_0^{-d} = mgd$$

עבודת כוח הקפיץ היא:

$$W_k = \int_0^{-d} k|y|dy = -\int_0^{-d} kdy = -\frac{ky^2}{2}|_0^{-d} = -\frac{kd^2}{2}$$

על מנת לקבל את מהירות המסה ברגע הפגיעה, נעזר בשיקולי אנרגיה. אנחנו יודעים את העבודה שנעשית על הגוף מרגע הפגיעה ועד עצירתו. לפי משפט עבודה - אנרגיה, זה ההפרש באנרגיה הקינטית. נסמן את מהירות הפגיעה ב v_0:

$$K_i + W = K_f$$
$$\frac{mv_0^2}{2} + mgd - \frac{kd^2}{2} = 0$$
$$v_0^2 = \frac{k}{m}d^2 - 2gd$$

העבודה שהכובד עושה מגובה h ועד הקפיץ, היא $W_g = mgh$. האנרגיה הקינטית בתחילה היא אפס, ובנקודת המפגש עם הקפיץ, היא לפי המהירות מהסעיף הקודם:

$$K_i + W = K_f$$
$$0 + mgh = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kd^2}{2} - mgd$$
$$h = \frac{k}{2mg}d^2 - d$$

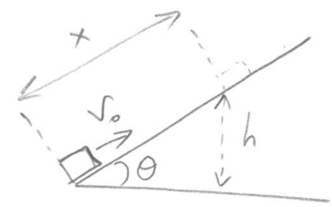
בשביל הסעיף האחרון, קודם כל נביע את d באמצעות h:

$$\frac{k}{2mg}d^2 - d - h = 0$$
$$d_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4h\frac{k}{2mg}}}{\frac{k}{mg}} = \frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4h\frac{k}{2mg}}\right)$$

הפתרון הרלוונטי הוא זה עם סימן הפלוס. אם נכפיל את h נקבל:

$$\tilde{d} = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 4h\frac{k}{2mg}}\right) = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 4\frac{k}{2mg}\left(\frac{k}{2mg}d^2 - d\right)}\right)$$

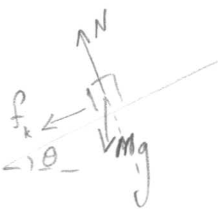
פתרון - 1_4102:



הגוף מקבל מהירות התחלתית v_0,
מקדם החיכוך (קינטי וסטטי) μ.

א. יש למצוא את המרחק שהגוף יעלה עד שיעצר. נסמן מרחק זה ב- x.
בתרגיל זה פועל כוח שאינו משמר - החיכוך הקינטי, ולכן נצטרך לחשב עבודה:

$$W_{f_k} = \Delta(E+U) = (E+U)_f - (E+U)_i$$



כוח החיכוך הוא קבוע וגודלו:

$$f_k = \mu \cdot N = \mu mg\cos\theta$$

ולכן העבודה היא $W_{f_k} = -f_k \cdot x = -\mu mg\cos\theta \cdot x$

נבחר את מישור הייחוס בתחתית המדרון, כך שבהתחלה יש לנו רק אנרגיה קינטית: $(E+U)_i = \frac{1}{2}mv_0^2$
בסוף - עצירת הגוף - רק אנרגיה פוטנציאלית:

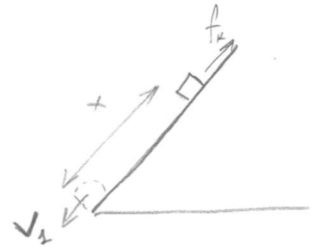
$$(E+U)_f = mgh = mgx\sin\theta$$

$$W_{f_k} = -\mu \cancel{m} g\cos\theta\, x = \cancel{m} gx\sin\theta - \frac{1}{2}\cancel{m}v_0^2$$

$$x(g\sin\theta + \mu g\cos\theta) = \frac{1}{2}v_0^2$$

$$x = \frac{v_0^2}{2g(\sin\theta + \mu\cos\theta)}$$

ב. כעת, הגוף עובר מרחק x במורד המישור:



$$W_{f_k} = \Delta(E+U) = \frac{1}{2}mv_1^2 - mgx\sin\theta$$

$$-\mu \cancel{m}g\cos\theta\, x = \frac{1}{2}\cancel{m}v_1^2 - \cancel{m}gx\sin\theta$$

$$v_1^2 = 2gx(\sin\theta - \mu\cos\theta)$$

נציב את x שקיבלנו ב-א' ונקבל:

$$v_1^2 = \cancel{2g}\cdot\frac{v_0^2}{\cancel{2g}(\sin\theta+\mu\cos\theta)}\cdot \sin\theta-\mu\cos\theta$$

$$\frac{v_0}{v_1} = \sqrt{\frac{\sin\theta+\mu\cos\theta}{\sin\theta-\mu\cos\theta}} = \sqrt{\frac{\tan\theta+\mu}{\tan\theta-\mu}}$$

ג. כאשר $\mu>\tan\theta$, נקבל בסעיף הקודם ביטוי שלילי מתחת לשורש = תוצאה לא פיזיקלית!

המשמעות היא שהחיכוך גדול מדי ובמקרה כזה הגוף יעצר לפני שיחזור לתחתית המדרון!