סמפור

הכוחות הפועלים על הקורה הם הכובד, והציר. מכיוון שאיננו יודעים איזה כוח מפעיל הציר, נשתמש במשוואות החוק השני לתנועה מעגלית, סביב ציר שנמצא בנקודת הציר. מכיוון שהמרחק בין הציר שבחרנו לנקודה שבה פועל כוח הציר הוא 0, הוא לא מפעיל מומנט. המומנט היחיד הוא של הכובד, שפועל כמובן ממרכז המסה. נחשב את התאוצה הזוויתית:

$$\sum \tau = mg\frac{L}{2}\cos\theta = I\alpha$$

נעביר אגף לקבלת:

$$\alpha = \frac{mgL\cos\theta}{2I}$$

נתנו לנו את מומנט ההתמד של הקורה יחסית לציר , $I = \frac{1}{3}mL^2$. נציב את זה:

$$\alpha = \frac{mgL\cos\theta}{2\cdot\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2L}$$

וכך יש לנו ביטוי לתאוצה הזוויתית. ביקשו את התאוצה הקווית של שתי נקודות. נקודה B שנמצאת במרחק:

$$r_B = 0.4m = \frac{0.4m\cdot 0.5m}{0.5m} = 0.8L$$

ונקודה A שנמצאת במרחק:

$$r_A = 0.15m = \frac{0.15m\cdot 0.5m}{0.5m} = 0.3L$$

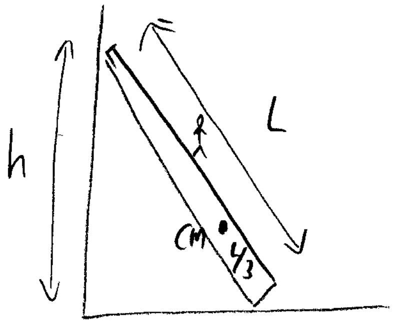
כדי למצוא את התאוצה הזוויתית של שתי הנקודות פשוט נציב בקשר $a = \alpha r$:

$$a_A = \alpha r_A = \frac{3g\cos\theta}{2L}0.3L = 0.45g\cos\theta$$
$$a_B = \alpha r_B = \frac{3g\cos\theta}{2L}0.8L = 1.2g\cos\theta$$

ביקשו גם באופן ספציפי כשהזווית היא $\theta = 50$. נציב:

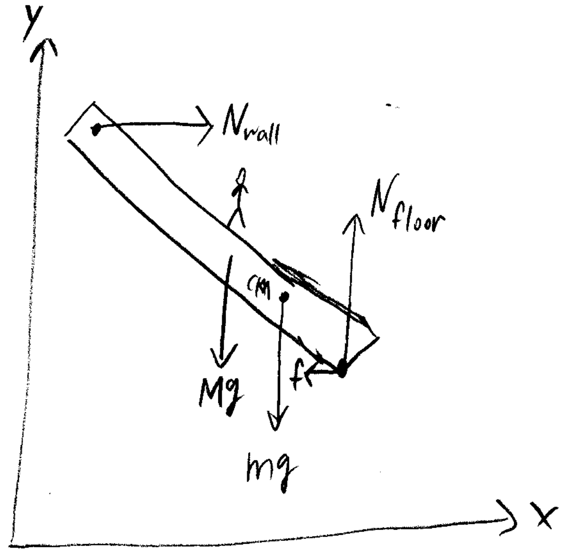
$$a_A = 0.45g\cos\theta \approx 0.29g \approx 2.9\frac{m}{s^2}$$
$$a_B = 1.2g\cos\theta \approx 0.77g \approx 7.7\frac{m}{s^2}$$

1_6303 פתרון



נשרטט את כל הכוחות והמומנטים הפועלים על הסולם.

(הכח הנורמלי שהאדם מפעיל הוא Mg, כי האדם נמצא בשיווי-משקל ולכן גם הנורמל שלו שווה למשקלו)



שיקול - הכוחות בצירים x ו-y הם

$$\sum F_x = N_{wall} - f$$

$$\sum F_y = N_{floor} - Mg - mg$$

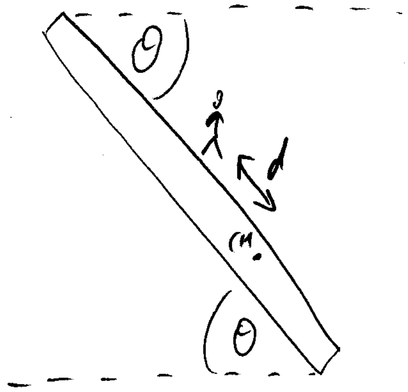
כיוון ששקול הכוחות בציר y הוא אפס, נקבל

$$\boxed{N_{floor} = (M+m)g}$$

מציר x נקבל $\boxed{N_{wall} = f}$. כדי לגלות את f נדרוש את שקול המומנטים ביחס לציר העובר דרך מרכז המסה.

המומנטים יהיו:

(נסמן ב-d את מרחק האדם ממרכז המסה)



$$\sin\theta = \frac{h}{L}$$

$$\cos\theta = \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}$$

$$\tau_{wall} = N_{wall} \cdot \frac{2L}{3} \cdot \sin\theta = N_{wall} \cdot \frac{2h}{3}$$

$$\tau_{\text{person}} = Mg \cdot d \cdot \cos\theta = Mg \cdot \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L} d$$

(בשיווי משקל $d = \frac{L}{6}$)

$$\tau_{floor} = N_{floor} \cdot \frac{L}{3} \cdot \cos\theta = N_{floor} \cdot \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3}$$

(mg לא יוצר מומנט כיוון פועל על מרכז המסה)

$$\tau_{friction} = f \cdot \frac{L}{3} \cdot \sin\theta = f \cdot \frac{h}{3}$$

ידוע שהסולם לא מסתובב כאשר האדם נמצא במרחק $d=\frac{L}{6}$ ממרכז המסה, נסיק שכאשר $d=\frac{L}{6}$ שקול המומנטים הוא אפס, כלומר:

$$\tau_{floor} + \tau_{\text{person}} = \tau_{wall} + \tau_{friction}$$

$$N_{floor} \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3} + Mg \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L} d = N_{wall} \cdot \frac{2h}{3} + f \cdot \frac{h}{3}$$

במצב של שיווי משקל, נציב:

$$\begin{cases} N_{wall} = f \\ N_{floor} = (M+m)g \end{cases}$$

ונסיק

$$(M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}d = f\cdot\frac{2h}{3} + f\cdot\frac{h}{3} \quad /:h$$

$$\boxed{f = (M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}\frac{d}{h}}$$

עבור $d = \frac{L}{6}$ נקבל

$$f = (M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{6h}$$

$$\boxed{f = \frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h}\left(\frac{3}{2}M + m\right)g}$$

d המקסימלי יתקבל כאשר כח החיכוך מקסימלי: $f_{max} = \mu_s N_{floor}$

כלומר $f_{max} = \mu_s (M+m)g$ $\quad f \le \mu_s (M+m)g$

נסיק ש-d צריך לקיים:

$$(M+m)g\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{3h} + Mg\frac{\sqrt{L^2-h^2}}{L}\frac{d}{h} \le \mu_s (M+m)g$$

ולכן

$$\boxed{d_{max} = \frac{M+m}{M}\left(\mu_s\frac{h}{\sqrt{L^2-h^2}} - \frac{1}{3}\right)L}$$

תרגיל <1 6420>

נכתוב את משוואות התנועה עבור המסות התלויות ובנוסף את משוואת המומנטים עבור הדיסקה הכפולה

נבחר צירים כלפי מטה עבור כל אחת מהמסות

$$\sum F = ma$$

$$\mathrm{M}_1 g - T_1 = M_1 a_1 \ \ , M_2 g - T_2 = M_2 a_2$$

$$\mathrm{M}_1(g - a_1) = T_1 \quad , \quad M_2(g - a_2) = T_2$$

נבחר ציר סיבוב במרכז הדיסקות וכיוון חיובי נגד כיוון השעון

$$\sum \tau = I\alpha$$

$$\sum \tau = T_2 r_2 - T_1 r_1 = I\alpha$$

כאשר מומנט ההתמד הוא

$$I = \frac{1}{2}(m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2)$$

עדיין יש לנו יותר נעלמים ממשוואות ולכן נצטרך למצוא את האילוץ

האילוץ ינבע מכך שהתנועה של החוטים היא ללא החלקה ולכן נקבל

$$a_1 = -\alpha r_1, \qquad a_2 = \alpha r_2$$

כעת נוכל לפתור את מה שנתבקשנו

א' – המערכת בשיווי משקל ולכן כל התאוצות שוות ל-0

מכאן נקבל

$$\mathrm{M}_1 g = T_1 \ \ , M_2 g = T_2$$

נציב במשוואת המומנטים

$$M_2 g r_2 = M_1 g r_1 \Rightarrow \frac{\mathrm{M}_2}{M_1} = \frac{r_1}{r_2}$$

ב' – נמצא את התאוצות של כל אחת מהמסות

$$M_2(g - a_2)r_2 - \mathrm{M}_1(g - a_1)r_1 = I\alpha$$

$$M_2(g - \alpha r_2)r_2 - \mathrm{M}_1(g + \alpha r_1)r_1 = I\alpha$$

נבודד את התאוצה הזוויתית

$$(M_2 r_2 - M_1 r_1)g = (I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)\alpha$$

$$\alpha = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)}$$

צריך לשים לב שאנחנו לא מחלקים ב-0 אבל במקרה הזה כל הגדלים חיוביים

ולבסוף התאוצות של כל אחד מהגופים יהיו

$$a_1 = -\frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)} r_1, \qquad a_2 = \frac{(M_2 r_2 - M_1 r_1)g}{(I + M_2 r_2^2 + M_1 r_1^2)} r_2$$