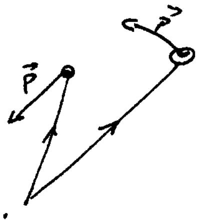
פרק B

תנע זוויתי

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$$



הגודל:

$$l = rp\sin\theta$$
$$= mrv\sin\theta$$

$\vec{l}$ - מודד "סיבוביות" הכיוון: לפי כלל יד ימין

הקשר בין תנע זוויתי $\vec{l}$ למומנט $\vec{\tau}$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$= \underbrace{\vec{v} \times m\vec{v}}_{= 0} + \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\frac{d\vec{l}}{dt} = \vec{\tau}$$

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}$$

אנלוגי של!

חוק שימור תנע זוויתי

אם המומנט מתאפס התנע הזוויתי נשמר

עבור מערכת של גופים $\vec{L} = \sum \vec{l}_i$

נפרק את תנועת מערכת הגופים לתנועת מרכז מסה ותנועה סביב מרכז מסה

$$\vec{P} = M\vec{V}_{CM} \quad , \quad \frac{d\vec{P}}{dt} = \sum F$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}_{\text{חיצוני}} + \vec{\tau}_{\text{פנימי}}$$

נובע מכוחות בין הגופים

חוק שימור תנע זוויתי
אם סכום המומנטים החיצוניים מתאפס, התנע הזוויתי נשמר.

אם כמו כן $\vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji}$ על הישר המחבר ביניהם אז

$$\sum \vec{\tau}_{\text{פנימי}} = \sum \vec{r} \times \vec{F} = 0$$

הקשר בין תנע זוויתי $\vec{L}$, ומהירות זוויתית ω

עבור גוף קשיח סימטרי

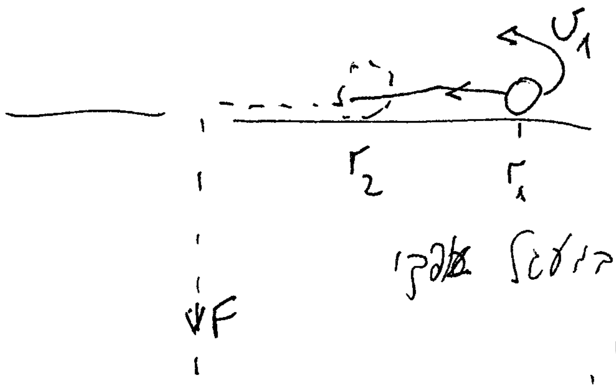
$$\tau = I\alpha = \frac{d}{dt}(I\omega)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} \Rightarrow L = I\omega + L_0$$

$L(\omega=0)=0$ אזי

$$L = I\omega$$

דוגמא:



גוף הקשור לחוט מסתובב במעגל אופקי ברדיוס r_i ובמהירות v_i.

וגוף נמשך בחוט כך שרדיוס הסיבוב שלו מתקצר ל r_f.

מצאו ω_f, v_f.

$$L_i = L_f \Leftarrow \frac{dL}{dt} = 0 \quad \Leftarrow \quad \begin{matrix}\tau = 0 \\ \vec{F} \parallel \vec{r}\end{matrix}$$

$$\vec{L}_i = \vec{r}_i \times \vec{p}_i = m v_i r_i \hat{z}$$

$$\vec{L}_f = \vec{r}_f \times \vec{p}_f = m v_f r_f \hat{z}$$

$$v_i r_i = v_f r_f$$

$$v_f = v_i \frac{r_i}{r_f} > v_i$$

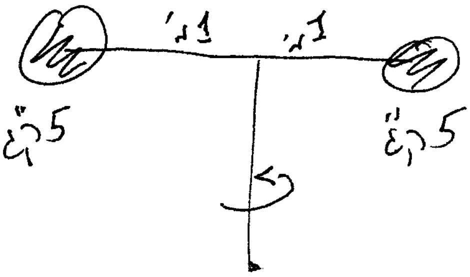
$$\omega_f = v_f / r_f = v_i \frac{r_i}{r_f^2} = \omega_i \frac{r_i^2}{r_f^2}$$

אנרגיה קינטית התחלתית: $K_i = \frac{1}{2} m v_i^2$

אנרגיה קינטית סופית: $K_f = \frac{1}{2} m v_f^2 = \frac{1}{2} m v_i^2 \frac{r_i^2}{r_f^2}$

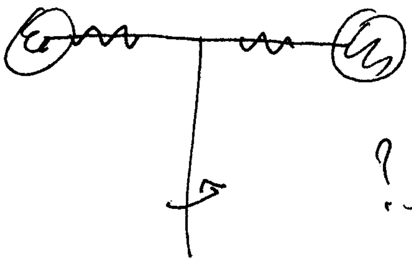
$K_f > K_i$ למה?

דוגמא נוספת:



$\omega_i = 0.5 \frac{\text{סב'}}{\text{שנ'}}$

↓ מכווץ וליים



מהי המהירות הזוויתית הסופית?

$\frac{dL}{dt} = 0$ (אין כוחות חיצוניים)

$L_i = L_f$

$I_i \omega_i = I_f \omega_f$

$I_i = 2 m r_i^2 = 10$ ק"ג מ'^{2}

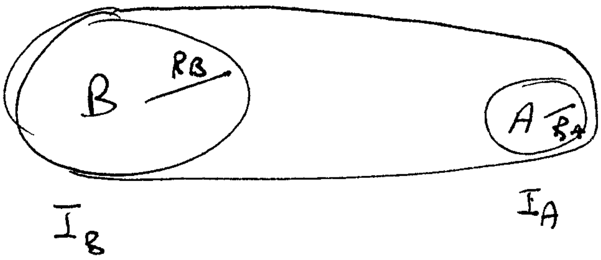
$I_f = 2 \cdot m r_f^2 = 10 \cdot 0.25 = 2.5$ ק"ג מ'^{2}

$\omega_f = \frac{I_i}{I_f} \omega_i = 4\omega_i = 2 \frac{\text{סב'}}{\text{שנ'}}$

12.37

13-12

[illegible]



הרצועה אינה מחליקה

מה צריך להיות היחס I_A/I_B אם:

א. לשני הגופים אותו תנע זוויתי

ב. לשני הגופים אותה אנרגיה קינטית?

תנע זוויתי: $L_A = I_A\omega_A$, אנרגיה קינטית $K_A = \frac{1}{2} I_A \omega_A^2$

$L_B = I_B\omega_B$ $K_B = \frac{1}{2} I_B \omega_B^2$

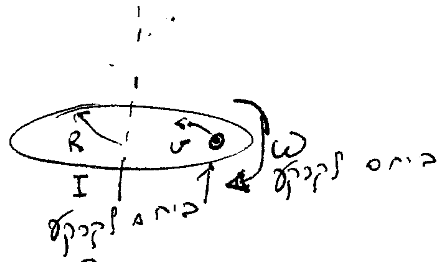
הרצועה אינה מחליקה $\Rightarrow$ $v_A = v_B$

$$\omega_A R_A = \omega_B R_B \Rightarrow \frac{\omega_A}{\omega_B} = \frac{R_B}{R_A}$$

א. $I_A\omega_A = I_B\omega_B$

$$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\omega_B}{\omega_A} = \frac{R_A}{R_B}$$ (לא צריך דיסקות אחידות!

ב. $$\frac{I_A}{I_B} = \frac{\omega_B^2}{\omega_A^2} = \frac{R_A^2}{R_B^2}$$ (יכול להיות דיסקות אחידות



ג'וק במסה m רץ במהירות v, וברגע $t=0$ עוצר.

א. מהי המהירות הזוויתית ω לאחר שהג'וק עצר.

ב. מהי האנרגיה הקינטית לאחר שהג'וק עצר. האם האנרגיה הקינטית נשמרה?

— התנע הזוויתי בכיוון ציר z נשמר: אין כוחות חיצוניים במישור הדיסקה.

$$L_i = L_f$$

$$L_i = -mvR + I\omega_i$$

$$L_f = m\omega_f R^2 + I\omega_f$$

$$\omega_f \left(mR^2 + I \right) = I\omega_i - mvR$$

$$\omega_f = \omega_i \left(\frac{I}{I+mR^2} \right) - \frac{mvR}{I+mR^2}$$

$$= \omega_i \left(\frac{1}{1+\frac{mR^2}{I}} \right) - \frac{\cancel{m}\, v/R}{1+\frac{I}{mR^2}}$$

ב.

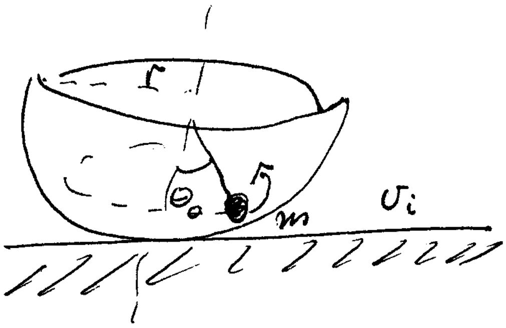
$$K_i = \frac{1}{2} I \omega_i^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

$$K_f = \frac{1}{2} I \omega_f^2 + \frac{1}{2} m \omega_f^2 R^2 = \frac{1}{2} \omega_f^2 \left(I + mR^2 \right)$$

$$= \frac{1}{2} I \omega_i^2 \left(\frac{1}{1+\frac{mR^2}{I}} \right)^2 + \frac{1}{2} I \ldots$$

[illegible]

נעשה עבור מקרה פרטי v התחלתי $= 0$ [illegible] K קטנה. מדוע?



- אנרגיה נשמרת
- l_z נשמר : אין כוח חיצוני אופקי

מה צריכה להיות המהירות כך שהגוף יגיע בדיוק לשפה ??

(1) $\frac{1}{2} m v_i^2 + m g h_i = \frac{1}{2} m v_f^2 + \cancel{m g h_f}$ $\qquad U(h_f) = 0$

(2) $\cancel{m} v_i r_i = \cancel{m} v_f r_f$ $\qquad h_i = -r\cos\theta_0$

$$v_f = v_i \frac{r_i}{r_f} = v_i \frac{r_i}{r} = v_i \sin\theta_0 \qquad r_f = r$$

$$\frac{1}{2} v_i^2 - \cancel{m} g r \cos\theta_0 = \frac{1}{2} v_i^2 \sin^2\theta_0$$

$$v_i^2 \left(1 - \sin^2\theta_0\right) = 2 g r \cos\theta_0$$

$$v_i = \sqrt{\frac{2gr}{\cos\theta_0}} \quad , \quad v_f = \sqrt{2gr \frac{\sin^2\theta_0}{\cos\theta_0}}$$

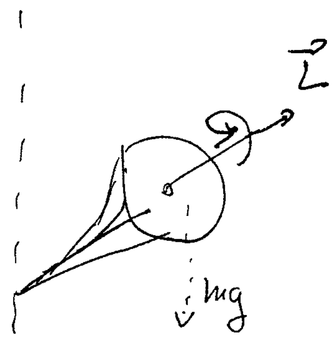
$v_i \to \infty$? $\quad \theta_i \to \pi/2$ כאשר

$\left\{ \begin{array}{l} v_i \to \sqrt{2gr} \\ v_f \to 0 \end{array} \right.$? $\quad \theta_i \to 0$

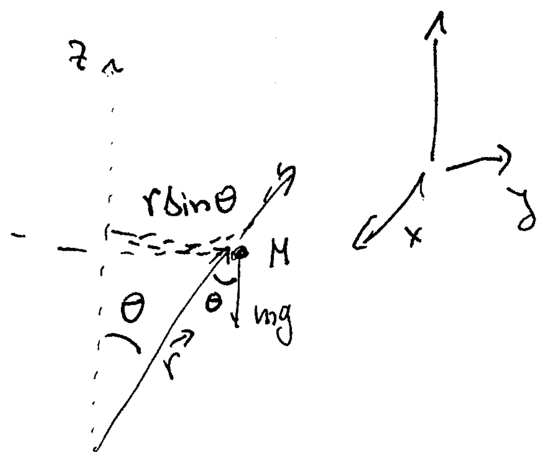
להדגים סביבון

פורפרה (סביבון)

P. 284 HRK



כיוון $L = (I\omega)$ לאורך ציר הסביבון.



$$\vec{L} \parallel \vec{r}$$

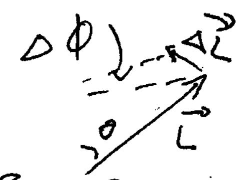
$$\tau = Mgr\sin\theta$$

$$\vec{\tau} \perp \vec{r} \Rightarrow \vec{\tau} \perp \vec{L}$$

$$\vec{\tau} \perp \hat{z}$$

$\vec{\tau}$ במישור xy.

$\Delta \vec{L} = \vec{\tau}\Delta t$ - מכיוון ש $\vec{\tau} \perp \vec{L}$ $\Leftarrow$ $\Delta\vec{L} \perp \vec{L}$



כמו במעגל

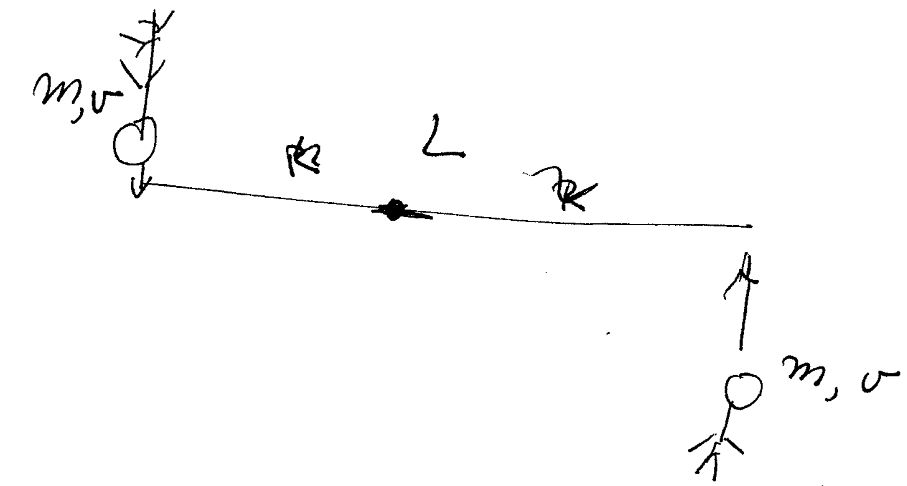
כלומר הקצה של $\vec{L}$ נע על מעגל ($\vec{\tau}$ משיק למעגל)

לתנועה כזו קוראים נקיפה (precession)

$$\Delta\phi \cong \frac{\Delta L}{L\sin\theta} = \frac{\tau\Delta t}{L\sin\theta}$$

$$\omega_p = \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = \frac{\tau}{L\sin\theta} = \frac{Mgr\sin\theta}{L\sin\theta} = \frac{mgr}{L} = \frac{mgr}{I\omega}$$

13-39



א. מה יקרה?

ב. המחליקים מתקרבים ל ½ המרחק, מה תנועתם?

ג. אנרגיה קינטית. האם נשמרת?

א. $F_{ext}=0 \Rightarrow \vec{\tau}=0 \Rightarrow L$ נשמר, $L_{\text{התחלתי}} = 2mv\frac{L}{2}\,\hat{z}$

$F_{ext}=0 \Rightarrow \vec{P}$ = נשמר, $\vec{P}_{\text{התחלתי}} = 0 \Rightarrow \vec{P}_{\text{סופי}} = 0$

ב. מרכז המסה נשאר במנוחה, המחליקים מסתובבים.

$$L = I\omega$$

$$(L_i)_z = mvL \,, \quad L_f = 2m\left(\frac{L}{2}\right)^2\omega_f$$

$$\omega_f = \frac{2mvL}{mL^2} = \frac{v}{(L/2)} \quad \checkmark$$

ג. $L_i = L_f \Leftarrow \vec{z}\parallel\vec{r}$

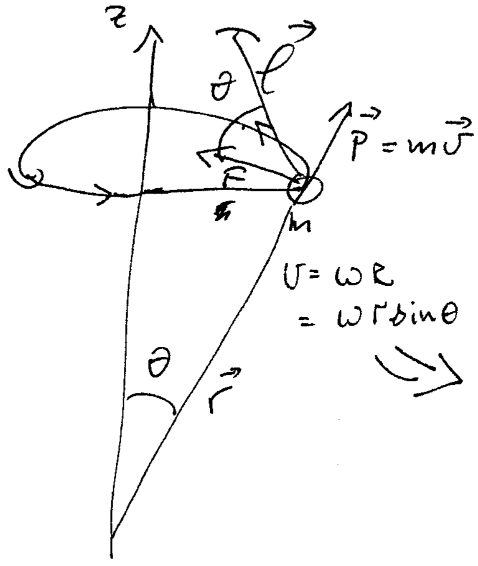
$$v_f r_f = v_i r_i$$

$$v_f = v_i \cdot \frac{r_i}{r_f} = 2v_i$$

$$\frac{K_f}{K_i} = \frac{v_f^2}{v_i^2} = \left(\frac{r_i}{r_f}\right)^2 = 4$$

השינוי בא מעבודה! — אין מומנט יש עבודה!

תנע זוויתי ומהירות זוויתית



$$v = \omega R = \omega r \sin\theta \Leftarrow \vec{\omega} = \frac{v}{R}\hat{z}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

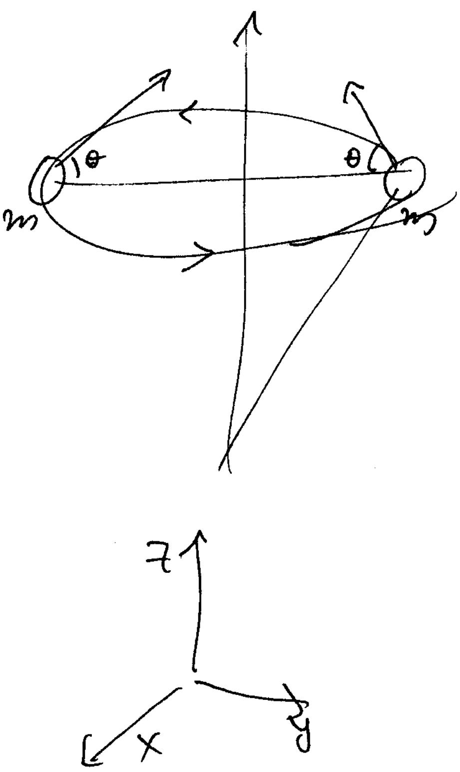
$$R = r\sin\theta$$

$$\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p} = m\vec{r} \times \vec{v}$$

$\vec{l}$ מאונך למישור הנוצר ע"י $\vec{r}$ ו $\vec{v}$!

$$l_z = l\sin\theta = m r v \sin\theta = m r \sin\theta \cdot \omega R = mR^2\omega = I\omega$$

מתי תנע זוויתי ומהירות זוויתית באותו כיוון ?



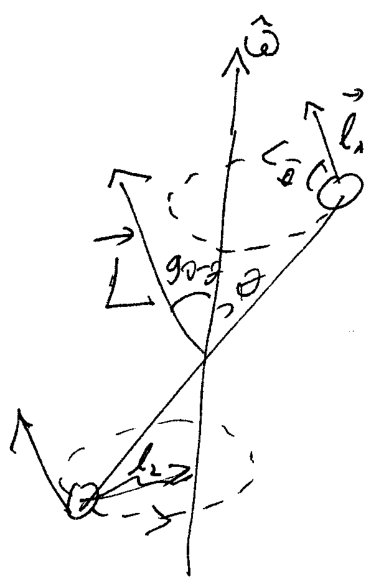
$$l_x = l_1 \cos\theta - l_2 \cos\theta$$

$$l_1 = l_2 \Rightarrow l_x = 0$$

$$l_z = l_1 \sin\theta + l_2 \sin\theta$$

$$= 2 l \sin\theta = 2mR^2\omega$$

$$= I\omega.$$



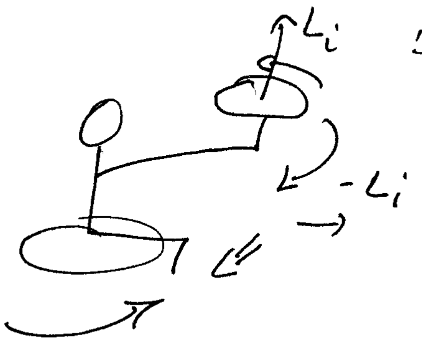
דוגמא

עבור כ,
תנע זוויתי
ומהירות זוויתית
אינם באותו כיוון!

$$l=\sum \vec{r}_i \times \vec{p}_i$$

$$\vec{r}_1 = -\vec{r}_2 \quad \Rightarrow \quad \vec{l}_1 = \vec{l}_2$$
$$\vec{p}_1 = -\vec{p}_2$$

דוגמא לשימור תנע זוויתי

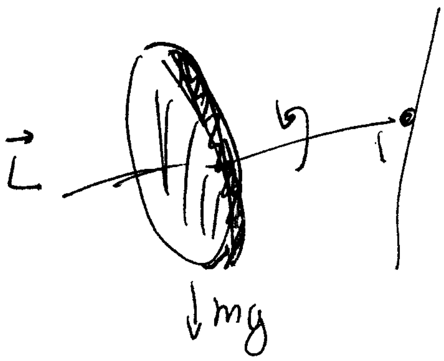


$$L_i = L_f \Rightarrow I\omega - L_i$$

$$I\omega = 2L_i$$

$$\omega = \frac{2L_i}{I}$$

גלגל אנכי מסתובב
על ציר אופקי היכול
לנוע בחופשיות



מה מומנט הכוח ?

במישור xy ולכן $\vec{L}$ חייב להשאר במישור xy אם התחלנו
ולכן הגלגל ישאר אופקי וינוע רק במישור!