מטוס טס במהירות $V_0$ על ציר $x$ בגובה רב $h$. ברגע $t=0$ נופל מהמטוס כדור במסה $m$, על הכדור פועל כח חיכוך של האוויר מהצורה $\vec{F}=-\gamma\vec{v}$

א) הסבירו את המינוס במשוואה.

ב) מצאו את מהירות הכדור כפונקציה של הזמן

ג) מצאו את מיקום הכדור כפונקציה של הזמן, נתון $x(t=0)=0$

א) המינוס אומר שהכח מנוגד לכיוון התנועה.

ב) נרשום את משוואות הכוחות

$$\sum\vec{F}=-\gamma\vec{v}-mg\hat{y}=m\vec{a}$$

$$F_x=-\gamma V_x=ma_x \qquad F_y=-\gamma V_y-mg=ma_y$$

$$\Downarrow$$

$$-\gamma V_x=m\frac{dV_x}{dt}$$

$$\Downarrow$$

$$-\frac{\gamma}{m}\int dt=\int\frac{dV_x}{V_x}$$

$$-\frac{\gamma}{m}t+c=\ln V_x$$

$$\Downarrow$$

$$V_x=e^{-\frac{\gamma}{m}t+c}=Ae^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$$V_x(t=0)=A=V_0$$

$$V_x(t)=V_0e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$$V_x(t\to\infty)=0$$

$$-V_y-\frac{mg}{\gamma}=\frac{m}{\gamma}\frac{dV_y}{dt}$$

$$-\frac{\gamma}{m}\int dt=\int\frac{dV_y}{V_y+\frac{mg}{\gamma}}$$

$$-\frac{\gamma}{m}t+C_2=\ln\left(V_y+\frac{mg}{\gamma}\right)$$

$$V_y+\frac{mg}{\gamma}=e^{-\frac{\gamma}{m}t+C_2}=A_2e^{-\frac{\gamma}{m}t}$$

$$V_y=A_2e^{-\frac{\gamma}{m}t}-\frac{mg}{\gamma}$$

$$V_y(t=0)=A_2-\frac{mg}{\gamma}=0\Rightarrow A_2=+\frac{mg}{\gamma}$$

$$V_y(t)=\frac{mg}{\gamma}\left(e^{-\frac{\gamma t}{m}}-1\right)$$

$$V_y(t\to\infty)=\frac{mg}{\gamma}$$

(c)

$$x = \int v_x\,dt = v_0 \int e^{-\frac{\gamma}{m}t} = -\frac{v_0 m}{\gamma} e^{-\frac{\gamma}{m}t} + C$$

$$x(t=0) = -\frac{v_0 m}{\gamma} + C = 0 \Rightarrow C = \frac{v_0 m}{\gamma}$$

$$x(t) = \frac{v_0 m}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)$$

$$y = \int v_y\,dt = \frac{mg}{\gamma}\int\left(e^{-\frac{\gamma t}{m}} + 1\right)dt = \frac{mg}{\gamma}\left(-\frac{m}{\gamma}e^{-\frac{\gamma t}{m}} + t\right) + C$$

$$y(t=0) = -\frac{m^2 g}{\gamma^2} + C = h \Rightarrow C = h + \frac{m^2 g}{\gamma^2}$$

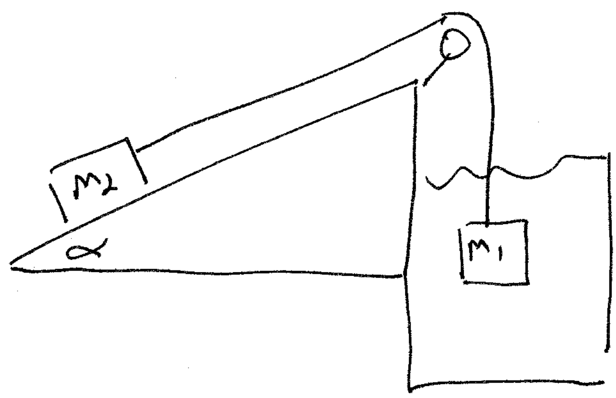
$$y(t) = h + \frac{mg}{\gamma}\left(t + \frac{m}{\gamma}\left(1 - e^{-\frac{\gamma}{m}t}\right)\right)$$

גוף בעל מסה $m_1$ ונפח $V$ טבול באמבט מים
המתנגדים לתנועה בכוח $f_w=-\beta v_1$ (כאשר $v_1$
מהירות הגוף) צמיגות המים כן. גוף שני בעל מסה $m_2$
מונח על מישור משופע בזווית $\alpha$. מקדמי חיכוך בין
המישור לגוף $\mu_k$, $\mu_s$. הגופים קשורים ע"י חוט וגלגלת
חסרי מסה.

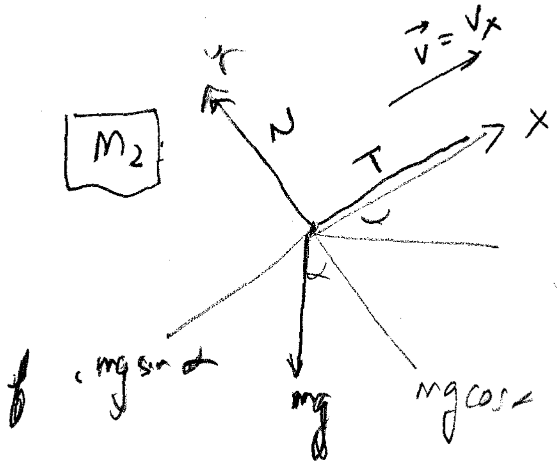
ב $t=0$ המערכת מתחילה לנוע בכיוון החץ.
בנוסף על כל גוף שקוע פועל כוח ציפה (כח "ארכימדס")
~~ה~~ בגודל $F_B=\rho V g$, $\rho$ צפיפות הנוזל, $V$ נפח הגוף.

א) בהנחה שהמהירות קבועה, מהי מהירות זו?

ב) מצאו מהירות המערכת כפונקציה של הזמן
ללא ההנחה שהיא קבועה.



פתרון

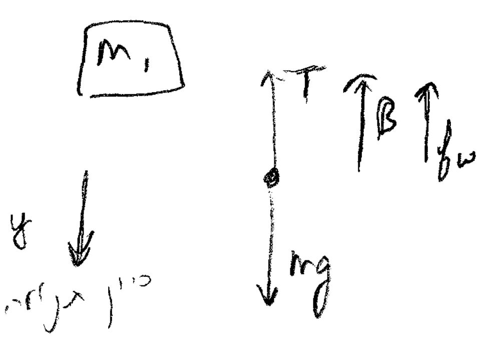



נבחר ונרשום משוואות על התנועה.

$$\Sigma F_y = N - m_2 g \cos\alpha = 0 \qquad 1$$

$$\Sigma F_x = T - f - m_2 g \sin\alpha = m_2 a \qquad 2$$

$$\boxed{f = \mu N \quad , N = m_2 g \cos\alpha} \Leftarrow$$




$$\Sigma F_y = m_1 g - B - f_w - T = m_1 a \qquad 3$$

$$f_w = -\beta V$$
$$B = \rho V g$$

א) נתון V קבוע לכן $a=0$

נחבר משוואות 2, 3 (B הכוונה בציר המערכת)

$$m_1 g - B - f_w - T + T - f - m_2 g \sin\alpha = 0$$
$$(a=0)$$

$$m_1 g - B - f_w - \mu m_2 g \cos\alpha - m_2 g \sin\alpha = 0 \quad \text{נציב}$$

$f_w = \beta V$ : נזכור אבל, נציב אותו

$$\frac{m_1 g - B - m_2 g\left[\mu \cos\alpha + \sin\alpha\right)}{\beta} = V$$

פתרון סעיף ב:

אם נחבר ② + ③ אזי נקבל משוואה.

$$\underbrace{m_1 g - B}_{V_F} - \beta v \underbrace{- \mu_k m_2 g\cos\alpha - m_2 g\sin\alpha}_{V_F} = (m_1+m_2)a$$

$$= (m_1+m_2)\frac{dv}{dt}$$

נציב מקדם: מהירות סופית (באין תאוצה)

$$\beta V_F = m_1 g - B - m_2 g(\mu_k\cos\alpha + \sin\alpha)$$

$$\beta(V_F - \cancel{\beta} v) = (m_1+m_2)\frac{dv}{dt}$$

$$\frac{dv}{\beta(V_F - v)} = \frac{dt}{m_1+m_2}$$

נחליף משתנים ונבצע אינטגרל

$$\beta(V_F - v) = u$$

$$-\beta dv = du \rightarrow dv = -\frac{1}{\beta}du$$

$$-\frac{1}{\beta}\int\frac{du}{u} = \int\frac{dt}{m_1+m_2}$$

$$-\frac{1}{\beta}\ln u = \frac{t}{m_1+m_2}$$

$$-\frac{1}{\beta}\ln(V_F - v) = \frac{t}{m_1+m_2} + C$$

ונעביר קבוע לאגף ימין

$$\ln(V_F - v) = -\frac{\beta}{m_1+m_2}t + C$$

$$V_F - V = Ae^{-\frac{\beta}{m_1+m_2}t}$$

$$V = V_F - Ae^{-\frac{\beta}{m_1+m_2}t}$$

נמצא את הקבוע מתנאי ההתחלה: $t=0, v_0=0$

נציב $t=0$:

$$V_F - V(t=0) = A$$

$$\Rightarrow \quad V_F = A$$

$$V = V_F\left[1 - e^{-\frac{\beta}{m_1+m_2}t}\right]$$

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{V_F\,\beta}{m_1+m_2}\,e^{-\frac{\beta}{m_1+m_2}t}$$

(נתון זה במבחן, אך אין צורך בו)

# כוח תלוי זמן

התרגילים של כוח תלוי זמן הם בעצם תרגילי תאוצה תלוית זמן במסווה. תרגילי תאוצה תלוית זמן למדנו בתרגול הראשון.

תאוצת הגוף היא:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{F_0}{m}\sin^2(\omega t) = \frac{F_0}{2m}(1-\cos(2\omega t))$$

נתחיל מלמצוא את מהירות הגוף:

$$v = \int a dt = \int \frac{F_0}{2m}\left(1-\cos(2\omega t)\right)dt = \frac{F_0}{2m}\left(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right) + C_1$$

על מנת למצוא את הקבוע, נציב תנאי שפה, כלומר מהירות בזמן $t=0$ שווה ל0. מזה נקבל:

$$C_1 = 0$$

$$v = \frac{F_0}{2m}\left(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right)$$

עכשיו נמצא את המיקום:

$$x = \int v dt = \int \frac{F_0}{2m}\left(t - \frac{1}{2\omega}\sin(2\omega t)\right)dt = \frac{F_0}{2m}\left(\frac{t^2}{2} + \frac{1}{4\omega^2}\cos(2\omega t)\right) + C_2$$

ועכשיו יש לשים לב, שבשאלה זו, על אף שהמיקום ההתחלתי הוא 0, הקבוע שקיבלנו באינטגרל אינו אפס.

$$x(t=0) = 0 = \frac{F_0}{2m}\frac{1}{4\omega^2}\cos(0) + C_2 = 0$$

$$C_2 = -\frac{F_0}{2m}\frac{1}{4\omega^2}$$

ונציב חזרה לקבלת המשוואה הסופית:

$$x(t) = \frac{F_0}{4m}\left(t^2 + \frac{1}{2\omega^2}\cos(2\omega t) - \frac{1}{2\omega^2}\right)$$

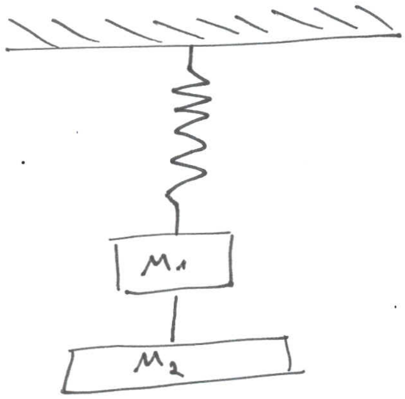
## תרגיל I:

מסה $M_2 = 2kg$ קשורה למסה $M_1 = 1kg$ ע"י חוט דק.
מסה $M_1$ מחוברת לקפיץ אנכי עם קבוע קפיץ $k = 100\,\frac{N}{m}$.
המערכת נמצאת במנוחה וברגע $t=0$ החוט נקרע.

א. מהו המיקום ההתחלתי של התנועה יחסית למצב הרפוי של הקפיץ?

ב. מהו מיקום נק' שיווי המשקל יחסית למצב הרפוי של קפיץ? מהי האמפליטודה של התנועה ההרמונית?

ג. מצא/י ביטוי למיקום הגוף כפונ' של הזמן (מרגע קריעת החוט).




פתרון:

א. נמצא ע"י משוואת כוחות עם שקול 0

$$\sum F_y = 0 = k y_0 - M_1 g - M_2 g$$

$$\Downarrow$$

$$y_0 = \frac{g(M_1+M_2)}{k} = \frac{3\cdot 9.8}{100} = \boxed{29.4cm}$$

ב. במצב החדש נמצא את נק' ה ש.מ. כאשר רק מסה $M_1$ מחוברת.

$$\sum F_y = 0 = k y_s - M_1 g \Rightarrow y_s = \frac{M_1 g}{k} = \boxed{9.8cm}$$

ג. תנאי השפה שלנו במקרה זה הם:

$$y(t=0) = y_0 - y_s = 19.6\ cm$$

$$V(t=0) = 0$$

נשתמש בפתרון המשוואה של תנועה הרמונית המתאימים ל cos התנאים הנ"ל ונקבל

$$y(t) = A\cos(\omega t)$$

לפי הצבת תנאי השפה נקבל את $A$

$$y(t=0) = y_0 - y_s = A\cos(0) = A$$

$$V(t) = \dot{y}(t) = -A\omega\sin(\omega t)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m_1}} = \boxed{10\ \frac{rad}{sec}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{y(t) = (y_0 - y_s)\cos(\omega t) = 19.6 \cdot \cos(10t)}$$