במערכת ישנם חוקי השימור הבאים:

1. שימור תנע זויתי בעת ההתנגשות
2. שימור אנרגיה לאחר ההתנגשות

אין שימור תנע קווי היות והמוט מקובע בציר.

א. חישוב מומנט ההתמד של מוט דק סביב קצהו:

$$I=\int \vec{r}_{\perp}^{2}dm=\begin{Bmatrix} dm=\lambda dx \\ \vec{r}_{\perp}^{2}=x^2 \end{Bmatrix}=\lambda\int_0^L x^2dx=\lambda\frac{L^3}{3}=\left\{\lambda=\frac{M}{L}\right\}=\boxed{\frac{1}{3}ML^2}$$

ב. כאמור, מתקיים חוק שימור התנע הזויתי. נדרוש כי התנע הזויתי של המערכת לפני ההתנגשות- $J_i=m_{\text{bullet}}vl$, כאשר l הוא המרחק האנכי של נקודת פגיעת הקליע מציר הסיבוב של המוט, שווה לתנע הזויתי של המערכת אחרי ההתנגשות- $J_f=I\omega$. כאן הזנחנו את מסת הקליע ביחס למסת המוט. מכאן-

$$\omega=\frac{m_{\text{bullet}}vl}{I}=\left\{I=\frac{1}{3}ML^2\right\}=\boxed{\frac{3m_{\text{bullet}}vl}{ML^2}}$$

ג. נשתמש בחוק שימור האנרגיה מיד לאחר ההתנגשות. האנרגיה בנק' ההתנגשות היא- $E_i=\frac{1}{2}I\omega^2$, ובנקודת הסיום כאשר המוט במנוחה- $E_f=Mg\frac{L}{2}(1-\cos\alpha)$. יש לשים לב שאת האנרגיה הפוטנציאלית מחשבים עבור מרכז המסה. כלומר, יש לחשב בכמה "עלתה" נקודת מרכז המסה של המוט על מנת להבין מהו הרווח באנרגיה הפוטנציאלית. מכאן:

$$I\omega^2=MgL(1-\cos\alpha)$$

$$\cos\alpha=1-\frac{I\omega^2}{MgL}=1-\frac{ML^2}{3MgL}\left(\frac{3m_{\text{bullet}}vl}{ML^2}\right)^2=\boxed{1-\frac{3m_{\text{bullet}}^2v^2l^2}{M^2gL^3}}$$

נוודא כי הגודל שבמסגרת אכן חסר יחידות: $\left[\frac{3m_{\text{bullet}}^2v^2l^2}{M^2gL^3}\right]=\frac{(\text{kg})^2\left(\frac{\text{m}}{\text{sec}}\right)^2\text{m}^2}{(\text{kg})^2\left(\frac{\text{m}}{\text{sec}^2}\right)\text{m}^3}=\frac{\text{m}}{\text{m}}=1$

1_6600

$m = 30\ kg$ $\quad M = 100\ kg$ $\quad I = 150\ kg \cdot m^2$

$\tilde{m} = 1\ kg$ $\quad R = 2\ m$

$V = 12\ m/s$ $\quad \theta = 37°$

1c) $J_i = \tilde{m} V_\perp R = \tilde{m} V \cos 37\, R$

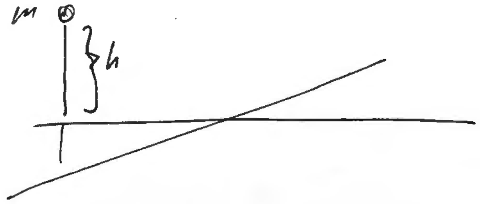
$J_f = (I + mR^2)\omega$

$J_i = J_f \Rightarrow (I + mR^2)\omega = \tilde{m} V \cos\theta\, R$

$$\omega = \frac{\tilde{m} V \cos\theta\, R}{I + mR^2} = \frac{1 \cdot 12 \cdot \cos 37 \cdot 2}{150 + 30 \cdot 4} = 0.07\ \frac{rad}{sec}$$

ד) $V = \omega R = 0.14\ m/s$

3) מוט אחיד בעל מסה M ואורך l יכול להסתובב סביב ציר אופקי העובר דרך מרכז המסה שלו בזווית α למוט. בהתחלה המוט נמצא במצב אופקי. מגובה h על קצה המוט נופל כדור קל בעל מסה m ומתנגש אלסטית עם המוט. לאיזה גובה עולה הכדור אחרי ההתנגשות?



* בבעיה הנתונה ישנו שימור אנרגיה ושימור תנע זווית ביחס לציר סיבוב.

$$mgh = \frac{1}{2}mV^2 \Rightarrow \underset{\text{מהירות פגיעה במוט}}{V} = \sqrt{2gh}$$

$$(1)\quad \frac{l}{2} m V \sin\alpha = I\omega + \frac{l}{2} m u \sin\alpha$$ שימור תנע זוויתי.

$$(2)\quad \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m u^2$$ שימור אנרגיה.

נחשב את I ביחס לציר אופקי:

$$(3)\quad I = \int r^2 dm = \int y^2 dm = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} l^2 \sin\alpha\, \rho\, dl = \frac{Ml^2}{12}\sin^2\alpha$$

$$(2) \rightarrow \omega = \frac{m(V-u)\, l \sin\alpha}{2I}$$

$$(2)\rightarrow(1):\quad m(V-u)(V+u) = \frac{m^2(u-V)^2 l^2 \sin^2\alpha}{4I} = \frac{3m^2(V-u)^2}{M}$$

$$V+u = \frac{3m}{M}(V-u)$$

$$u = -\left(\frac{M-3m}{M+3m}\right)V$$

$$h' = \frac{u^2}{2g} = h\left(\frac{M-3m}{M+3m}\right)^2$$

* הכדור יקפוץ בתנאי ש: $M > 3m$

שני כדורים מחוברים

התנע הזוויתי והתנע הקווי נשמרים. מכיוון שזו התנגשות אלסטית גם האנרגיה נשמרת. בקשר לתנע הקווי, בגוף קשיח מתייחסים לתנע הקווי של מרכז המסה. בנוסף, מכיוון שהמפגש הוא על ציר x, נניח שמרכז המסה נע גם כן רק בציר x. נבחר כציר עבור התנע הזוויתי את מרכז המסה של המוט, וביחס לציר זה המרחק האופקי של הגוף השלישי לפני ההתנגשות הוא $\frac{L}{2\sqrt{2}}$. נסמן את מהירות מרכז המסה ב v_{cm}, ואת מהירות הגוף הנוסף לאחר ההתנגשות בu. נקבל שלוש משוואות (תנע, תנע זוויתי ואנרגיה בהתאמה):

$$mv_0 = mu + 2mv_{cm} \tag{1}$$

$$mv_0\frac{L}{2\sqrt{2}} = mu\frac{L}{2\sqrt{2}} + I\omega \tag{2}$$

$$m\frac{v_0^2}{2} = m\frac{u^2}{2} + 2m\frac{v_{cm}^2}{2} + I\frac{\omega^2}{2} \tag{3}$$

נשתמש במשוואת התנע הקווי (1) על מנת לבטא את u:

$$u = v_0 - 2v_{cm}$$

נציב את זה בביטויים של התנע הזוויתי והאנרגיה (תוך כדי סידור קל של האלגברה):

$$v_0 = (v_0 - 2v_{cm}) + \frac{2\sqrt{2}}{mL}I\omega$$

$$v_0^2 = (v_0 - 2v_{cm})^2 + 2v_{cm}^2 + \frac{I}{m}\omega^2$$

עוד קצת ארגון אלגברי יתן:

$$v_{cm} = \frac{\sqrt{2}I}{mL}\omega$$

$$0 = 6v_{cm}^2 - 4v_{cm}v_0 + \frac{I}{m}\omega^2$$

ועכשיו ניתן להציב את המהירות הזוויתית מהמשוואה הראשונה בשניה לקבלת:

$$6v_{cm}^2 - 4v_{cm}v_0 + \frac{I}{m}\left(\frac{mL}{\sqrt{2}I}v_{cm}\right)^2 = 0$$

$$v_{cm}\left(6v_{cm} + \frac{mL^2}{2I}v_{cm} - 4v_0\right) = 0$$

מומנט ההתמד של שני כדורים זהים במרחק L ביחס למרכז המסה שלהם הוא:

$$I = m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}mL^2$$

נציב את זה בביטוי שקיבלנו למהירות מרכז המסה:

$$v_{cm}\left(6v_{cm} + \frac{mL^2}{2\cdot\frac{1}{2}mL^2}v_{cm} - 4v_0\right) = v_{cm}(7v_{cm} - 4v_0) = 0$$

מה שמשאיר שתי פתרונות. אחד הוא שמרכז המסה לא זז, והכדור נשאר במהירותו ההתחלתית, כלומר הוא בעצם חולף דרך הכדורים המחוברים. האופציה השניה (שבאמת מתארת התנגשות) היא ש:

$$v_{cm} = \frac{4}{7}v_0$$

$$\omega = \frac{mL}{\sqrt{2}I}v_{cm} = \frac{mL}{\sqrt{2}\frac{1}{2}mL^2}v_{cm} = \frac{2}{\sqrt{2}}\frac{v_{cm}}{L} = \frac{4}{7\sqrt{2}}\frac{v_0}{L}$$

$$u = v_0 - 2v_{cm} = v_0 - 2\cdot\frac{4}{7}v_0 = -\frac{1}{7}v_0$$