

## תרגול #9 - שימור תנע

19 במאי 2013

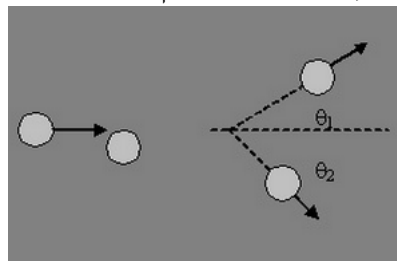
### שאלה 1\_4500 - התנגשות אלסטית במימד 1 ו-2 מימדים

כדור שמסתו  $m$  ובעל מהירות התחלתית  $v_0$  מתנגש התנגשות אלסטית וחזיתית בכדור שני זהה ונייח.



א. הוכיחו כי לאחר ההתנגשות, הכדור הפוגע יעצר והכדור הנפגע יקבל את כל מהירותו ההתחלתית של הכדור הפוגע?

הניחו כעת כי ההתנגשות בין שני הכדורים אינה חזיתית, אך עדיין אלסטית.



ב. הוכיחו כי הזווית בין שני הכדורים לאחר ההתנגשות בתנאים הנ"ל תהיה תמיד ישרה  $\theta_1 + \theta_2 = 90^\circ$ .

### פתרון

אין כוחות חיצוניים הפועלים על מערכת שני הגופים ולכן יש שימור תנע. ההתנגשות היא אלסטית ולכן מתקיים גם שימור אנרגיה:

$$\begin{aligned} m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 &= m_1 \vec{u}_1 + m_2 \vec{u}_2 \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 &= \frac{1}{2} m_1 u_1^2 + \frac{1}{2} m_2 u_2^2 \end{aligned}$$

נסמן את הכדור הפוגע בתור כדור מס' 1 והכדור הנפגע בתור כדור מס' 2.  $v_i$  הן המהירויות

לפני ההתנגשות ו- $u_i$  הן המהירויות אחרי ההתנגשות.

$$mv_0 = mu_1 + mu_2$$

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mu_1^2 + \frac{1}{2}mu_2^2$$

$$(v_0)^2 = (u_1 + u_2)^2$$

$$v_0^2 = u_1^2 + u_2^2$$

$$(u_1 + u_2)^2 = u_1^2 + 2u_1 \cdot u_2 + u_2^2 = u_1^2 + u_2^2$$

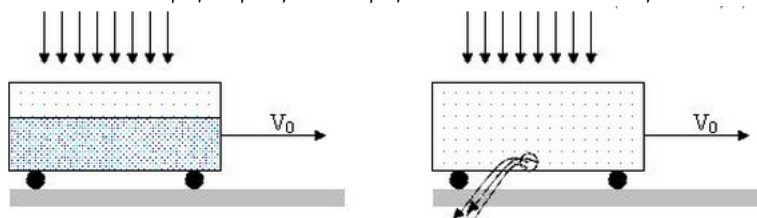
$$u_1 \cdot u_2 = u_1 u_2 \cos \theta = 0$$

**א.** ההתנגשות היא חזיתית, כלומר וקטורי המהירויות הן באותו קו (אופקי), כלומר  $\theta = 0, 180^\circ$ . ואז אנו מקבלים שמהירות אחד הכדורים חייבת להתאפס. וכיוון שהכדור הראשון אינו יכול לעבור "דרך" הכדור השני, אנו מסיקים כי הכדור השני נע באותה מהירות  $v_0$  והכדור הפוגע נעצר.

**ב.** ההתנגשות אינה חזיתית ולכן, על מנת לאפס את  $u_1 \cdot u_2 = u_1 u_2 \cos \theta$  הוקטורים צריכים להיות מאונכים, כלומר בזווית של  $\theta = 90^\circ$ .

### שאלה 1\_4701 - קרונית מים

ביום גשום משלחים שני קרוונות זהים במהירות התחלתי שווה. בקרון אחד מצטברים מי הגשם בקצב קבוע, ובקרון השני ישנו חור המאפשר למי הגשם לזרום החוצה בניצב לכיוון מהירות הגשם כך שלא מצטברים מים בקרון. החיכוך בין הקרון והמסילה זניח.



**א.** רשמו ביטוי למהירות כל קרון כפונקציה של הזמן.

**ב.** איזה קרון יגיע למרחק גדול יותר עד עצירתו הסופית?

### פתרון

נגדיר את הקרון בו מי הגשם נאגרים כקרון א.

א. מסת קרון א נתונה על ידי:  $m = m_0 + At$ . כלומר  $m_0$  היא מסת הקרון כאשר היא ריקה והמסה שלה גדלה ליניארית בזמן, כלומר בפרקי זמן שווים מתווספת אותה כמות מי גשמים. לא פועלים על קרון א כוחות חיצוניים ולכן:

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= \vec{F}_{ext} = 0 \\ m_0 v_0 &= m(t) v(t) \\ m_0 v_0 &= (m_0 + At) v(t) \\ \Downarrow \\ v(t) &= \frac{m_0 v_0}{m_0 + At} \end{aligned}$$

כעת נתבונן בקרון ב. המים שיוצאים ממנו, יוצאים עם מהירות אופקית, כלומר עם תנע. כלומר, הקרון מאבד כמות תנע קטנה (דיפרנציאלי) עם הזמן בגלל שמהירותו משתנה:

$$dp = m_0 dv$$

התנע הזה עובר כולו (בהעדר כוחות חיצוניים) לכמות מים קטנה (דיפרנציאלי):

$$dp = dm \cdot v(t) = Adt \cdot v(t)$$

נשווה את שניהם ונקבל משוואה דיפרנציאלית מסדר ראשון:

$$\begin{aligned} m_0 dv &= Adt \cdot v(t) \\ \frac{dv}{v} \Big|_{v_0}^0 &= \frac{A}{m_0} dt \Big|_0^t \\ v &= v_0 e^{-\frac{A}{m_0} t} \end{aligned}$$

ב. קרון ב מאבד מהירות באופן אקספוננציאלי, לעומת קרון א שמאבד מהירות כפונקציה של  $\frac{1}{t}$ , לכן קרון ב יעצר קודם.