תרגול #11 - תנועה סיבובית

1 ביוני 2013

רקע תיאורטי

מומנט כח ותאוצה מעגלית

באנלוגיה למשפט השני של ניוטון:

$$\sum \vec{F} = m\vec{a}$$

אנו מקבלים עבור שקול מומנטי הכח הפועלים על גוף את הקשר הבא:

$$\sum \tau = I\alpha$$

נשים לב שגם כאן מומנט האינרציה (התמד) I בתנועה סיבובית אנלוגי לתפקיד המסה בתנועה קווית, בדיוק כפי שהיה עבור האנרגיה הקינטית:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2$$

משפט עבודה-אנרגיה בתנועה מעגלית

$$\begin{aligned}
W &= \int \vec{F}\cdot d\vec{l} = \int F_{\perp} r d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} \tau d\theta \\
&= \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\alpha d\theta = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\alpha \frac{d\theta}{dt} dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\alpha\omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\frac{d\omega}{dt}\omega dt = \int_{\theta_i}^{\theta_f} I\omega d\omega \\
W &= \frac{1}{2}I\omega_f^2 - \frac{1}{2}I\omega_i^2 = \Delta K
\end{aligned}$$

משפט ציר מקביל

מומנט האינרציה סביב ציר כלשהו אשר מקביל ומצוי במרחק L מציר הסיבוב העובר דרך מרכז המסה של הגוף הוא:

$$I = I_{CM} + ML^2$$

כאשר:

- I_{CM} - מומנט האינרציה סביב ציר העובר דרך מרכז המסה
- M - מסת הגוף
- L - מרחק ציר הסיבוב ביחס למרכז המסה

תאוצה ומהירות זוויתית

ישנו קשר בין תאוצה a ומהירות משיקית v לתאוצה זוויתית α ומהירות זוויתית ω בתנועה סיבובית, בהתאמה.

$$\begin{aligned} l &= \theta r \\ v &= \omega r \\ a &= \alpha r \end{aligned}$$

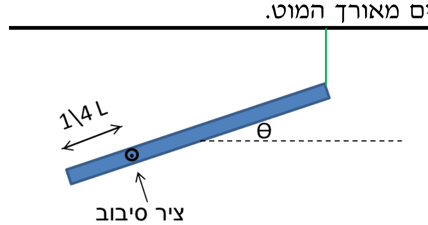
l הוא העתק על גבי מסלול מעגלי, קשת (חלק ממעגל) והוא פרופורציוני לזווית θ שעשה הגוף במהלך תנועתו.
המשוואות הללו תמיד נכונות. במקרה הפרטי של תנועה שוות תאוצה:

$$\begin{aligned} l &= l_0 + v_0 t + \frac{1}{2} a t^2 \\ v &= v_0 + at \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \theta &= \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega &= \omega_0 + \alpha t \end{aligned}$$

שאלה 1_6418 - מוט תלוי

מוט דק ואחיד שמסתו $M = 5\,kg$ ואורכו $L = 2\,m$ מקובע לציר אידיאלי ומוחזק בשיווי משקל בזווית ביחס לאופק על ידי חוט הקשור לקצהו. החוט אידיאלי וקשור אנכית לתקרה. גוזרים את החוט והמוט מתחיל להסתובב סביב הציר. המרחק של הציר ממרכז המסה של המוט הינו רבע מאורך המוט, והמרחק של הציר מנקודת החיבור של החוט הינו שלושה רבעים מאורך המוט.



א. מהי המתיחות בחוט לפני גזירתו?

ב. מצאו ביטוי לגודל התאוצה הזוויתית של המוט כתלות בזווית בה נטוי המוט ביחס לאופק.

ג. מהי התאוצה המשיקית המקסימלית של מרכז המסה?

ד. מהי המהירות המשיקית המקסימלית אליה תגיע מרכז המסה במהלך תנועת המוט?

פתרון

א. כאשר החוט קיים, המוט בשיווי משקל אינו נע ואינו מסתובב, לכן:

$$\sum \vec{F} = 0$$
$$\sum \vec{\tau} = 0$$

אולם עם בחירה נכונה של נק' ציר סיבוב עבור המומנטים, נוכל למצוא את המתיחות עם משוואת המומנטים בלבד במקום 3 משוואת (משוואת כוחות בציר x, בציר y ומשוואת מומנטים).

הכוחות הפועלים על הגוף:

- מתיחות T הפועלת בנקודה העליונה הימנית.
- כח הכובד Mg הפועל בנקודת מרכז המסה. במקרה שלנו נקודה זו היא במרכז המוט.
- כח F שמפעיל ציר הסיבוב על המוט אשר פועל לאורך המוט ובעצם מאפשר תנועה סיבובית סביב הציר (כח מרכזי).

נבחר את ציר הסיבוב בבעיה כציר שעבורו נחשב את המומנטים. לפיכך מומנט הכח F שווה אפס מאחר והוא פועל בנקודת הציר. נשארנו עם מומנט כח הכובד ומומנט המתיחות:

$$\begin{aligned}
\vec{\tau} &= \vec{r}\times\vec{F} \\
\tau_g &= \frac{L}{4}Mg\sin\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) = \frac{L}{4}Mg\cos\left(-\theta\right) = \frac{1}{4}LMg\cos\theta \\
\tau_T &= -\frac{3L}{4}T\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right) = -\frac{3}{4}LT\cos\theta \\
\sum\vec{\tau} &= \tau_g+\tau_T = \frac{1}{4}LMg\cos\theta-\frac{3}{4}LT\cos\theta = 0 \\
T &= \frac{1}{3}Mg
\end{aligned}$$

ב. כעת גזרו את החוט ואין יותר כח מתיחות שפועל על המוט. המוט נע סביב הציר ולכן נותרנו רק עם מומנט הכח של כח הכובד:

$$\frac{1}{4}LMg\cos\theta = I\alpha$$

כל שעלינו למצוא הוא את מומנט ההתמד I סביב ציר הסיבוב. נשתמש ב**משפט שטיינר** (משפט הציר המקביל) כדי לחשב את I:

$$I = I_{CM}+Mh^2$$

מומנט ההתמד סביב מרכז המסה של המוט, כלומר סביב אמצע המוט:

$$I_{CM} = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} x^2\frac{M}{L}dx = \frac{M}{L}\frac{x^3}{3}|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \frac{ML^2}{12}$$

$h=\frac{L}{4}$ הוא המרחק של ציר הסיבוב שלנו בבעיה ממרכז המסה. על כן מומנט ההתמד:

$$I = \frac{ML^2}{12}+M\left(\frac{L}{4}\right)^2 == \frac{7}{48}ML^2$$

ומומנט התאוצה αהוא פשוט:

$$\alpha = \frac{12}{7}\frac{g}{L}\cos\theta$$

ג. התאוצה המשיקית של מרכז המסה ניתן על ידי:

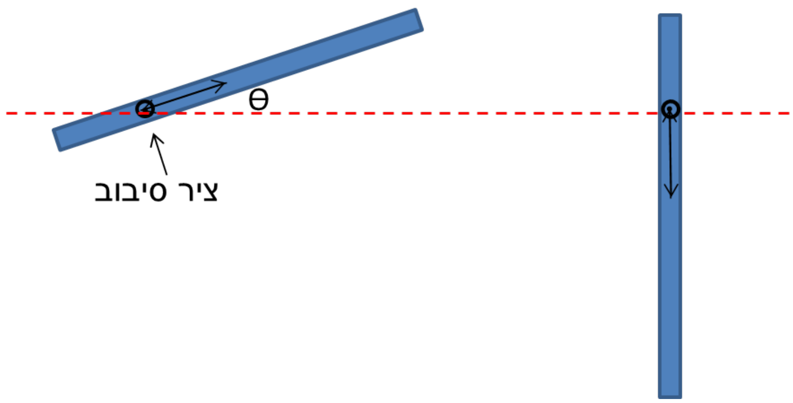
$$\begin{aligned}
a &= \alpha r \\
a_{CM} &= \frac{12}{7}\frac{g}{L}\cos\theta\frac{L}{4} = \frac{3}{7}g\cos\theta
\end{aligned}$$

התאוצה המקסימלית מתקבלת כאשר $\theta = 0$ בכיוון התנועה וכן כאשר $\theta = \pi$ בו התאוצה היא בניגוד לכיוון התנועה (תאוטה).

$$a_{CM,max} = \pm\frac{3}{7}g$$

נשים לב שבזוויות אלו כח הכובד מאונך לזרוע המוט, ולכן תרומת מומנט הכח לסיבוב מקסימלית מאחר ומדובר במכפלה וקטורית ורק הרכיב המאונך חשוב לנו לסיבוב.

ד. כל עוד התאוצה בכיוון המהירות, המהירות תלך ותגדל. ברגע שהתאוצה הופכת כיוון ומנוגדת למהירות, זה המקום בו המהירות מקסימלית (משיקית או זוויתית). נקודה זו היא כאשר $\theta = -\frac{\pi}{2}$. כלומר, כאשר המוט במצב אנכי.
נרצה לחשב את המהירות באמצעות שיקולי אנרגיה. אין כוחות חיכוך ולכן יש שימור אנרגיה במערכת. לפנינו רק אנרגיה קינטית (זוויתית) ואנרגית כובד פוטנציאלית.
מאחר והאנרגיה קבועה בכל רגע, נבחר את נקודת ההתחלה (רגע גזירת החוט) שבה אין למוט אנרגיה קינטית ובנוסף את הנקודה בה אנו רוצים לחשב את מהירות המוט והיא עבור $\theta = -\frac{\pi}{2}$ ונשווה בין האנרגיות של שתי נקודות אלו.
נבחר קו ייחוס עבור האנרגיה הפוטנציאלית שיעבור דרך ציר הסיבוב. כאשר נקודת מרכז המסה מעל קו הייחוס, האנרגיה תהיה חיובית וההיפך.



$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2}I\omega^2 \\ U_g &= mgh \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Mg\frac{L}{4}\sin\theta &= \frac{1}{2}I\omega^2 - Mg\frac{L}{4} \\ \omega &= \sqrt{\frac{MgL}{2I}\left(1+\sin\theta\right)} = \sqrt{\frac{24}{7}\frac{g}{L}\left(1+\sin\theta\right)} \\ v &= \omega r \\ v_{CM} &= \omega\frac{L}{4} = \sqrt{\frac{3}{14}gL\left(1+\sin\theta\right)} \end{aligned}$$