תרגול 9 - אנרגיה פוטנציאלית:

אנרגיה פוטנציאלית היא החלק מהאנרגיה של מערכת אשר תלוי <u>במיקומה</u> או <u>במבנה הפנימי</u> שלה.

אנרגיה פוטנציאלית יכולה להיות כובדית, אלסטית, כימית, חשמלית, גרעינית וכו'.

מש' עבודה ואנרגיה ניתן לרשום כ-

$$\Delta E_k = W_{tot} \iff \Delta E = \Delta E_k + \Delta U = W_{\text{non conservative}}.$$

אנרגיה כוללת של גוף תהיה -

$$E_{tot} = E_k + U = \frac{1}{2} m v^2 + U$$

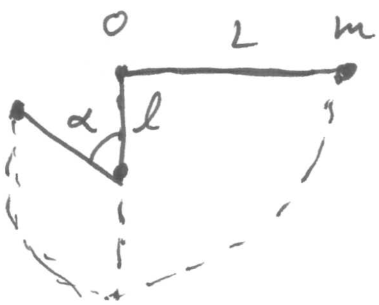
1-4222

תרגילים:

1. כדור קטן במסה m קשור לקצה חוט באורך L. קצהו השני של החוט מחובר לנק' O, והכדור משוחרר כאשר החוט אופקי וישר. כשהחוט מגיע למצב אנכי הוא פוגע במסמר בנק' G.

א. מהו הגודל של מהירות הכדור כאשר החוט יוצר זווית α עם OG?

ב. מצאו α בה החוט מתרופף.



פתרון:

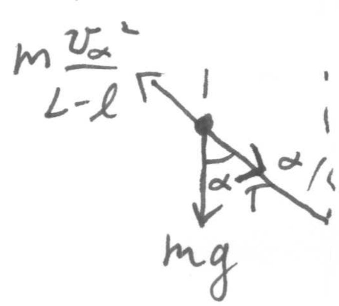
א. אין כאן כוחות לא-משמרים, והמתיחות פועלת תמיד במאונך לכיוון התנועה, כך ש- $W_T=\int \vec{T}\cdot d\vec{r}=0$ ויש שימור אנרגיה!

$$E_{tot}(i)=E_{tot}(f)$$

$$\cancel{m}gL=\frac{1}{2}\cancel{m}v_\alpha^2+\cancel{m}g\left[(L-l)(1+\cos\alpha)\right]$$

$$v_\alpha^2=2g\left[L+(l-L)(1+\cos\alpha)\right]$$

ב. נעבור למע' הייחוס שנעה עם הכדור:



1-4222. cont.

ג. כוחות:

$$\sum F = 0 = m\frac{v_\alpha^2}{L-l} - T - mg\cos\alpha$$

$$T = m\left[\frac{v_\alpha^2}{L-l} - g\cos\alpha\right]$$

בנק' הקריטית זה שווה לאפס:

$$\frac{v_\alpha^2}{L-l} - g\cos\alpha = 0$$

$$\frac{2g}{L-l}\left[L+(l-L)(1+\cos\alpha)\right] - g\cos\alpha = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{2l}{3(L-l)} \xrightarrow{l=\frac{L}{2}} \frac{2}{3} \quad //$$

Solution to motion in harmonic – gravitational potential:

Energy is conserved and therefore $E=\frac{1}{2}m\dot{x}^2+U(x)=\text{const}$. We rearrange to have-

$$E=\frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+U(x)\rightarrow dt=\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}}$$

The potential is given by $U(x)=\begin{cases} mgx, x>0 \\ \frac{1}{2}kx^2, x<0 \end{cases}$. Let us mark the x values at which the particle turns around by x_l and x_r, where $\frac{1}{2}kx_l^2=E\rightarrow x_l=-\sqrt{\frac{2E}{k}}$ and $mgx_r=E\rightarrow x_r=\frac{E}{mg}$.

The period of the bounded motion will be twice the time it takes to get from x_l to x_r. Using the rearranged energy conservation equation we get-

$$\int_0^{T/2}dt=\int_{x_l}^{x_r}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}}$$

$$\frac{T}{2}=\int_{x_l}^{x_r}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-U(x)\right)}}=\int_{x_l}^{0}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-\frac{1}{2}kx^2\right)}}+\int_{0}^{x_r}\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E-mgx\right)}}$$

$$T=\sqrt{\frac{2m}{E}}\left[\int_{x_l}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2E}kx^2}}+\int_{0}^{x_r}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{mg}{E}x}}\right]\equiv I_l+I_r$$

Let's take care of each of the integrals separately, starting with the first:

$$I_l=\sqrt{\frac{2m}{E}}\int_{x_l}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{1}{2E}kx^2}}=\left\{x_l=-\sqrt{\frac{2E}{k}}\right\}=\sqrt{\frac{2m}{E}}\int_{x_l}^{0}\frac{dx}{\sqrt{1-(x/x_l)^2}}$$

Substitute, say, $\frac{x}{x_l}=\cos\theta\rightarrow dx=-x_l\sin\theta d\theta$ to get-

$$I_l=-\sqrt{\frac{2m}{E}}x_l\int_{0}^{\pi/2}\frac{\sin\theta d\theta}{\sqrt{1-\cos^2\theta}}=-\sqrt{\frac{2m}{E}}x_l\int_{0}^{\pi/2}d\theta=\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{2m}{E}}\sqrt{\frac{2E}{k}}=\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

On to the second integral:

$$I_r = \sqrt{\frac{2m}{E}}\int_0^{x_r}\frac{dx}{\sqrt{1-\frac{mg}{E}x}} = \left\{x_r = \frac{E}{mg}\right\} = \sqrt{\frac{2m}{E}}\int_0^{x_r}\frac{dx}{\sqrt{1-x/x_r}}$$

Substitute $1-\dfrac{x}{x_r} = z \to dx = -x_r dz$ to get-

$$I_r = -\sqrt{\frac{2m}{E}}x_r\int_1^0\frac{dz}{\sqrt{z}} = 2\sqrt{\frac{2m}{E}}x_r = 2\sqrt{\frac{2m}{E}}\frac{E}{mg} = 2\sqrt{\frac{2E}{mg^2}}$$

Finally,

$$\boxed{T = I_1 + I_2 = \pi\sqrt{\frac{m}{k}} + 2\sqrt{\frac{2E}{mg^2}}}$$