רצ'ט

קודם כל נתאר את כלל הכוחות בבעיה. על המוט פועלים:

- כוח הכובד ממרכז המוט כלפי מטה.
- הכוח שנובע מהציר המקובע למוט מימין למעלה. גודלו וכיוונו לא ידועים.
- כוח הנורמל בנקודה המגע עם הדיסקה, כלפי מעלה.
- כוח החיכוך עם הדיסקה. אם הדיסקה נעה ימינה, הוא פועל ימינה ולהפך.

על הדיסקה פועלים:

- כוח הכובד ממרכז הדיסקה.
- הכוח הנובע מהציר במרכז הדיסקה.
- כוח הנורמל בנקודת המגע עם המוט, כלפי מטה.
- כוח החיכוך בנקודת המגע עם המוט, פועל באופן מנוגד לחיכוך שפועל על המוט. אם הדיסקה נעה ימינה הוא פועל שמאלה ולהפך.

נוכל למצוא את גודל כוח החיכוך בעזרת חישובי מומנט על המוט בלבד. המוט לא זז ולא מסתובב, ולכן סכום הכוחות וגם סכום המומנטים עליו מתאפס. הכי נוח יהיה לחשב את המומנטים ביחס לציר הסיבוב, מכיוון שזה יחסוך לנו את הבירור לגבי הכוח שהציר עצמו מפעיל. זה משאיר שלושה כוחות שמפעילים מומנטים. נשים לפני כוח החיכוך סימן $\pm$, וכך נבצע את שתי האפשרויות במכה (שהחיכוך שמאלה או ימינה).

$$
\begin{aligned}
\sum \tau &= 0 \\
\sum \tau &= Nl\sin\theta - mg\frac{l}{2}\sin\theta \pm fl\cos\theta = 0 \\
f &= \mu N \\
0 &= N - \frac{mg}{2} \pm \mu N\cot\theta = 0 \\
mg &= 2N\left(1 \pm \mu\cot\theta\right) \\
N &= \frac{mg}{2 \pm 2\mu\cot\theta} \\
f = \mu N &= \frac{\mu mg}{2 \pm 2\mu\cot\theta}
\end{aligned}
$$

אחרי כל הסיפור הזה, יש לנו את גודל כוח החיכוך, עבור שתי האפשרויות (ימינה ושמאלה). נחשב את התאוצה הזוויתית של הדיסקה. אם נבחר כציר את ציר הסיבוב של הדיסקה, ישאר רק מומנט אחד. המומנט של הציר ושל הכובד מתאפסים מכיוון שמרחקם מהציר אפסי, והמומנט של הנורמל מתאפס מכיוון שהוא בכיוון הרדיאלי. רק החיכוך מפעיל מומנט. אם כך, משוואת התאוצה הזוויתית פשוטה למדי:

$$
\begin{aligned}
\sum \tau &= I\alpha \\
\pm fR &= I\alpha \\
\alpha &= \pm\frac{fR}{I}
\end{aligned}
$$

עכשיו אנחנו צריכים לשאול את עצמנו מה הקשר בין תאוצה לבין זמן העצירה. על פי הגדרה, השינוי במהירות הסיבובית הוא התאוצה הסיבובית, ובמקרה של תאוצה קבועה המהירות הזוויתית מקבלת ביטוי פשוט. בעזרתו ניתן להביע את זמן העצירה:

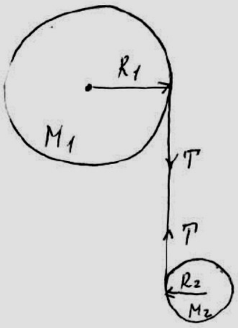
$$\omega(t) = \omega_0 + \alpha t = 0$$
$$t = \frac{-\omega_0}{\alpha} = \frac{-\omega_0}{\pm\frac{fR}{I}}$$

בהנחה שהמהירויות ההתחלתיות שמאלה וימינה היו זהות (אבל עם סימנים מנוגדים), היחס הוא פשוט:

$$\frac{t_+}{t_-} = \frac{\frac{\omega_0}{\frac{f_+R}{I}}}{\frac{\omega_0}{\frac{f_-R}{I}}} = \frac{f_-}{f_+} =$$
$$= \frac{\frac{\mu mg}{2-2\mu\cot\theta}}{\frac{\mu mg}{2+2\mu\cot\theta}} = \frac{1+\mu\cot\theta}{1-\mu\cot\theta} = \frac{\tan\theta+\mu}{\tan\theta-\mu}$$

כשהפעולה האחרונה של המרת הקוטנגנס לטנגנס נעשתה רק כדי שמי שקיבל פתרון עם טנגנס ידע שגם הוא נכון.

התוצאה שקיבלנו חסרת יחידות, כנאה ליחסים. אופן הפתרון היה כזה: מצאנו את כוח החיכוך משיקולי סטטיקה של המוט, ואז חישבנו את השינוי בתאוצה של הגוף התחתון. השינוי בתאוצה הופכי לשינוי בזמן.



$$\begin{cases} T R_1 = I_1 \alpha_1 = \frac{1}{2} M_1 R_1^2 \alpha_1 \\ M_2 g - T = M_2 a \\ T R_2 = I_2 \alpha_2 = \frac{1}{2} M_2 R_2^2 \alpha_2 \end{cases}$$

$$a = \alpha_1 R_1 + \alpha R_2 \Leftarrow s = \frac{1}{2} a t^2 =$$

$$= s_1 + s_2 =$$

$$= \frac{1}{2}(\alpha_1 R_1 + \alpha_2 R_2) t$$

$$\alpha_1 R_1 = \frac{2T}{M_1}$$

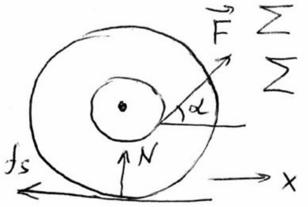
$$\alpha_2 R_2 = \frac{2T}{M_2} \Rightarrow a = \frac{2T(M_1 + M_2)}{M_1 M_2}$$

$$T = \frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \frac{a}{2}$$

$$a = \frac{(M_1 + M_2) g}{\frac{3}{2} M_1 + M_2}$$

$$\alpha_1 = \frac{M_2}{\frac{3}{2} M_1 + M_2} \frac{g}{R_1} ; \quad \alpha_2 = \frac{M_1}{\frac{3}{2} M_1 + M_2} \frac{g}{R_2}$$

N4



$$\sum \tau_i = I\alpha$$

$$\sum \vec{F}_i = M\vec{a}_{cm}$$

$$\begin{cases} (1)\ Rf_s - rF = I\dfrac{a_{cm}}{R} & \text{ע' ממרכז} \\ (2)\ F\cos\alpha - f_s = Ma_{cm} & :x \\ N + F\sin\alpha - Mg = 0 & :y \end{cases}$$

מ־(1) ו־(2):

$$a_{cm} = \frac{FR^2\left(\cos\alpha - \frac{r}{R}\right)}{I + MR^2}$$

$$f_s = \frac{F\,(I\cos\alpha + MRr)}{I + MR^2}$$

א)

$$F = F_{max} \Leftarrow f_s = f_{s\,max}$$

$$f_{s\,max} = \mu_s(Mg - F\sin\alpha)$$

$$F_{max}\frac{(I\cos\alpha + MRr)}{I + MR^2} = \mu_s(Mg - F\sin\alpha)$$

$$\boxed{F_{max} = \frac{\mu_s Mg}{\frac{I\cos\alpha + MRr}{I + MR^2} + \mu_s\sin\alpha}}$$

ב)

$$a_{cm} > 0 \qquad \boxed{\cos\alpha > \frac{r}{R}}$$

$$W = \Delta K$$

$$\Delta K = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{MV_{cm}^2}{2} = \left(\frac{I}{R^2} + M\right)\frac{V_{cm}^2}{2}$$

$$V_{cm} = a_{cm}t$$

$$\Delta K = \left(\frac{I}{R^2} + M\right)\frac{a_{cm}^2 t^2}{2} = \boxed{\frac{F^2(R\cos\alpha - r)^2 t^2}{2(I + MR^2)}}$$

1_6600

$m = 30\ kg$ $M = 100\ kg$ $I = 150\ kg \cdot m^2$

$\tilde{m} = 1\ kg$ $R = 2\ m$

$V = 12\ m/s$ $\theta = 37°$

ג) $J_i = \tilde{m} V_\perp R = \tilde{m} V \cos 37\, R$

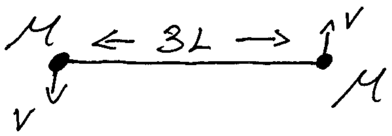
$J_f = (I + mR^2)\omega$

$J_i = J_f \Rightarrow (I + mR^2)\omega = \tilde{m} V \cos\theta\, R$

$$\omega = \frac{\tilde{m} V \cos\theta\, R}{I + mR^2} = \frac{1 \cdot 12 \cdot \cos 37 \cdot 2}{150 + 30 \cdot 4} = 0.07\ \frac{rad}{sec}$$

ד) $V = \omega R = 0.14\ m/s$

1_GG01



א) שתי הרקדניות ינועו במסלול מעגלי ברדיוס $1.5L$ סביב מרכז המסה המשותף.

$R = 1.5L$

$J_i = MVR + MVR = 2MVR = Mv3L$

$J_f = I\omega = (MR^2 + MR^2)\omega = 2MR^2\omega$

$J_i = J_f \Rightarrow 2MR^2\omega = 3MVL$

$\omega = \frac{3}{2}\frac{VL}{R^2} = \frac{2}{3}\frac{V}{L} = V/R$

ב) $E_k = \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot 2MR^2\cdot\frac{V^2}{R^2} = 2\cdot\frac{1}{2}MV^2 = MV^2$

$\tilde{R} = \frac{1}{2}L = \frac{1}{3}R$

ג) $J_i = I\omega = 2MRV$

$J_f = \tilde{I}\tilde{\omega} = 2M\tilde{R}^2\cdot\tilde{\omega} = \frac{2}{9}MR^2\tilde{\omega}$

$\Rightarrow \tilde{\omega} = 9V/R = 9\omega$

ד) $\tilde{E}_k = \frac{1}{2}\tilde{I}\tilde{\omega}^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{2}{9}MR^2\cdot 81\omega^2 = 9MR^2\omega^2 = 9MV^2 = 9E_k$

ה) על מנת לשנות את המצב הקיים שלהן $(\tilde{V}=3V)$ הרקדניות

השקיעו עבודה בגודל $8MV^2$ שהלכה לאנרגיה הקינטית של המערכת

L6603

גלגל עם מומנט התמד $1.27\ kg\cdot m^2$ מסתובב במהירות זוויתית 824 סל"ד סביב ציר. פתאום מצמידים לציר גלגל שני שנמצא במנוחה עם מומנט התמד $4.85\ kg\cdot m^2$. מה המהירות הזוויתית הסופית של 2 הגלגלים?

פתרון

① נתונים:

$$I_1 = 1.27\ kg\cdot m^2$$
$$I_2 = 4.85\ kg\cdot m^2$$
$$\omega_{0_1} = 824 \text{ סל"ד} \quad , \quad \omega_{0_2} = 0$$
$$\omega_{0F} = ? \qquad \omega_{0F} = ?$$

② ~~xxxx~~ נוסחאות דינמיות:

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

אין מומנט כח. $\vec{\tau} = 0$: $\vec{L}$ נשמר

③ נרשום שימור תנע זוויתי (כמו עם $\vec{p}$):

$$\vec{L}_{1_i} + \vec{L}_{2_i} = \vec{L}_{1F} + \vec{L}_{2F}$$
$$I_1\omega_{1_i} + I_2\omega_{2_i} = I_1\omega_{1F} + I_2\omega_{2F}$$

והמעבר לפתרון:

שניהם מודבקים לאותו ציר

$$\omega_1 = \omega_2$$

(המשך בדף הבא).

L-6603 נושא

$$(I_1 + I_2)\,\omega_i = (I_1 + I_2)\,\omega_f$$

$$\frac{I_1 \omega_1}{I_1 + I_2} = \omega_f$$

נקבל:

$$\frac{1.27\ kg\cdot m^2 \times 824\ rev/min}{1.27\ kg\cdot m^2 + 4.85\ kg\cdot m^2} = 171\ rev/min$$

והמרה יחידות:

$$\left(2\pi\ rad/rev\right)\left(171\ rev/min\right)\frac{1}{60}\left(min/sec\right)$$

$$= 18\ rad/sec$$

יחידות נכונות של ω.

a. Linear momentum (No outer impulse in the plane of motion) and angular momentum (in respect to the center of mass of M+m, No outer torque) are conserved.

b. Using conservation of linear momentum:

$$P_x = mv_0 = (m+M)v \tag{1}$$

$$v = \frac{mv_0}{(m+M)} \tag{2}$$

The position of the center of mass:

$$L_{cm} = \frac{mR}{m+M} \tag{3}$$

The moment of inertia in respect to the CM:

$$I = \frac{MR^2}{2} + ML_{cm}^2 + m(R - L_{cm})^2 \tag{4}$$

Using conservation of angular momentum:

$$mv_0(R - L_{cm})\sin\beta = I\omega \tag{5}$$

$$\omega = \frac{mv_0(R - L_{cm})\sin\beta}{\frac{MR^2}{2} + ML_{cm}^2 + m(R - L_{cm})^2} \tag{6}$$

c. It is clearly an inelastic collision so:

$$\triangle E = \frac{I\omega^2}{2} + \frac{(m+M)v^2}{2} - \frac{mv_0^2}{2} \tag{7}$$