מומנט ההתמד מוגדר באופן הבא:

$$I=\int \vec{r}_{\perp}^{\,2}dm$$

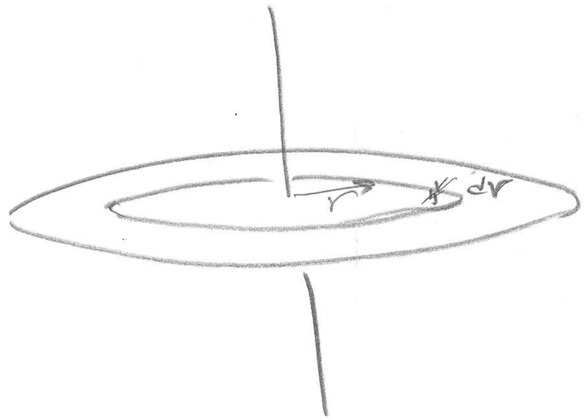
כאשר $\vec{r}_{\perp}^{\,2}$ הוא המרחק האנכי של אלמנט המסה האינפיניטיסימלי dm מציר הסיבוב.

בבעיה שלנו $\vec{r}_{\perp}^{\,2}=x^2$ ו- $dm=\sigma dS=\sigma dxdy$ כאשר σ היא צפיפות המסה המוגדרת ע"י $\sigma=\frac{M}{A}=\frac{M}{ab}$. נציב ונבצע את האינטגרציה:

$$I=\int \vec{r}_{\perp}^{\,2}dm=\sigma\int_{y=0}^{b}\int_{x=0}^{a}x^2dxdy=\sigma b\frac{a^3}{3}=\left\{\sigma=\frac{M}{ab}\right\}=\boxed{\frac{1}{3}Ma^2}$$

פתרון 1-6206

חישוב מומנט התמד של דיסקה.



הרעיון הכללי בשאלה להתייחס לדיסקה כאוסף של טבעות. לכן, נמצא מומנט התמד של טבעת אחת ונסכום על כל הטבעות המרכיבות את הדיסקה.

א. מומנט התמד של טבעת $dI = dm\, r^2$

כאשר dm זהו המסה של טבעת ברדיוס r ובעובי dr

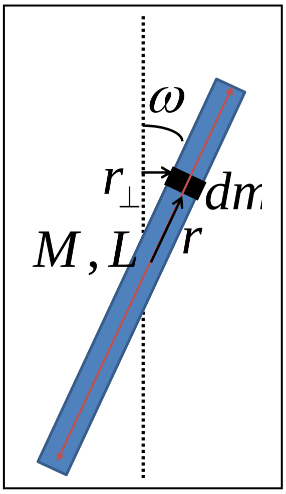
$$dm = \underbrace{\sigma}_{\text{צפיפות מסה}} \cdot \underbrace{2\pi r}_{\text{היקף הטבעת}} \cdot \underbrace{dr}_{\text{עובי הטבעת}}$$

תזכורת צפיפות מסה (מסה כוללת חלקי שטח כולל) $\sigma = \frac{M}{\pi R^2}$

ב. $$I = \int dI = \int_0^R dm\, r^2$$

$$= \int_0^R \frac{M}{\pi R^2} \cdot 2\pi r \cdot r^2 \cdot dr = \frac{MR^2}{2}$$

השאלה:



חשבו מומנט התמד לסיבוב של מוט דק ואחיד במסה M ובאורך L סביב ציר העובר במרכזו והנטוי בזוית α ביחס אליו.

הפתרון:

מונמט ההתמד מחושב על ידי האינטגרל $I = \int_{r\,\min}^{r\,\max} r_\perp^2 dm$ כאשר $r_\perp$ הוא המרחק של אלמנט המסה dm מציר הסיבוב, כש ש: $r_\perp^2 = r^2 \sin^2(\alpha)$. למוט צפיפות אחידה, כך שניתן להגדיר $\lambda = m/L = dm/dr$. מומנט ההתמד הוא אם כן:

$$I = \int_{r\,\min}^{r\,\max} r_\perp^2 dm = \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} r^2 \sin^2(\alpha) \lambda dr = \lambda \sin^2(\alpha) \frac{r^3}{3}\bigg|_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} = \lambda \sin^2(\alpha) \frac{L^3}{12}$$

נציג את הפתרון עם נתוני השאלה בלבד: $I = \frac{ML^2}{12} \sin^2(\alpha)$, מצאנו שמומנט ההתמד המתוקן מקבל פקטור $\sin^2$ ביחס למומנט ההתמד שמקביל לציר.

סמפור

הכוחות הפועלים על הקורה הם הכובד, והציר. מכיוון שאיננו יודעים איזה כוח מפעיל הציר, נשתמש במשוואות החוק השני לתנועה מעגלית, סביב ציר שנמצא בנקודת הציר. מכיוון שהמרחק בין הציר שבחרנו לנקודה שבה פועל כוח הציר הוא 0, הוא לא מפעיל מומנט. המומנט היחיד הוא של הכובד, שפועל כמובן ממרכז המסה. נחשב את התאוצה הזוויתית:

$$\sum \tau = mg\frac{L}{2}\cos\theta = I\alpha$$

נעביר אגף לקבלת:

$$\alpha = \frac{mgL\cos\theta}{2I}$$

נתנו לנו את מומנט ההתמד של הקורה יחסית לציר , $I = \frac{1}{3}mL^2$. נציב את זה:

$$\alpha = \frac{mgL\cos\theta}{2\cdot\frac{1}{3}mL^2} = \frac{3g\cos\theta}{2L}$$

וכך יש לנו ביטוי לתאוצה הזוויתית. ביקשו את התאוצה הקווית של שתי נקודות. נקודה B שנמצאת במרחק:

$$r_B = 0.4m = \frac{0.4m\cdot 0.5m}{0.5m} = 0.8L$$

ונקודה A שנמצאת במרחק:

$$r_A = 0.15m = \frac{0.15m\cdot 0.5m}{0.5m} = 0.3L$$

כדי למצוא את התאוצה הזוויתית של שתי הנקודות פשוט נציב בקשר $a = \alpha r$:

$$a_A = \alpha r_A = \frac{3g\cos\theta}{2L}0.3L = 0.45g\cos\theta$$
$$a_B = \alpha r_B = \frac{3g\cos\theta}{2L}0.8L = 1.2g\cos\theta$$

ביקשו גם באופן ספציפי כשהזווית היא $\theta = 50$. נציב:

$$a_A = 0.45g\cos\theta \approx 0.29g \approx 2.9\frac{m}{s^2}$$
$$a_B = 1.2g\cos\theta \approx 0.77g \approx 7.7\frac{m}{s^2}$$

מוט מחליק

הגוף שלנו לא מחליק, כלומר הוא אינו זז בכלל. נתחיל מלרשום את משוואת הכוחות בשני הצירים:

$$\sum F_x = N - T\sin\beta = 0$$
$$\sum F_y = T\cos\beta + f - mg = 0$$
$$\Downarrow$$
$$N\cot\beta + f - mg = 0$$

נוסיף לתערובת ביטוי על המומנטים , כאשר נבחר את הציר להיות הקצה הימני של המוט. המטרה בבחירה זו היא לא להוסיף עוד פעם את המתיחות למשוואות. נקבל:

$$mg\frac{L}{2}\sin\beta - fL\sin\beta + NL\cos\beta = 0$$
$$mg - 2f + 2N\cot\beta = 0$$

חיבור משוואה זו עם המשוואה שקיבלנו מהכוחות, נותן:

$$N\cot\beta + f - mg + mg - 2f + 2N\cot\beta = 0$$
$$f = 3N\cot\beta \leq \mu N$$
$$\mu \geq 3\cot\beta$$

וזה הפתרון.

כמובן שאפשר לפתור את השאלה גם סביב ציר אחר, בחירה פופולרית למשל תהיה סביב הקצה השמאלי של המוט. משם נקבל:

$$mg\frac{L}{2}\sin\beta - TL\sin 2\beta = 0$$

$$mg = 4T\cos\beta$$

והצבה של זה בביטויים של הכוח תחזיר אותנו לאותה התשובה כמובן.

גשר על מים סוערים

משוואת הכוחות על הגשר נותנת לנו:

$$T_R + T_L - N - m_B g = 0$$

משוואת הכוחות על הילד נותנת לנו:

$$N - m_c g = 0$$

חיבור של המשוואות יתן:

$$T_R + T_L - m_c g - m_B g = 0$$

נחשב את המומנטים, ביחס לציר שעובר במרכז הגשר, כאשר נסמן את מיקום הנער בx:

$$\begin{aligned} T_R \frac{L}{2} - Nx - T_L \frac{L}{2} &= 0 \\ T_R \frac{L}{2} - m_c g x - T_L \frac{L}{2} &= 0 \\ T_R - T_L - 2m_c g \frac{x}{L} &= 0 \end{aligned}$$

כדי למצוא את הגבלות התנועה על הנער, פעם נחבר את המשוואות לקבלת הגבול על המתיחות מימין, ופעם נחסר בשביל הגבול על המתיחות משמאל:

$$\begin{aligned} & 2T_R - m_B g - m_c g \left(2\frac{x}{L} + 1\right) = 0 \\ & T_R = \frac{m_B g}{2} + \frac{m_c g}{2} \left(2\frac{x}{L} + 1\right) \leq T_{R_{\text{מקס}}} \\ & m_c g \frac{x}{L} \leq T_{R_{\text{מקס}}} - \frac{m_B g}{2} - \frac{m_c g}{2} \\ & x \leq \left(\frac{T_{R_{\text{מקס}}}}{m_c g} - \frac{m_B}{2m_c} - \frac{1}{2}\right) \cdot L \\ & x \leq \left(\frac{350N}{40kg 10\frac{N}{kg}} - \frac{20kg}{80kg} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2m \\ & x \leq 0.25m \end{aligned}$$

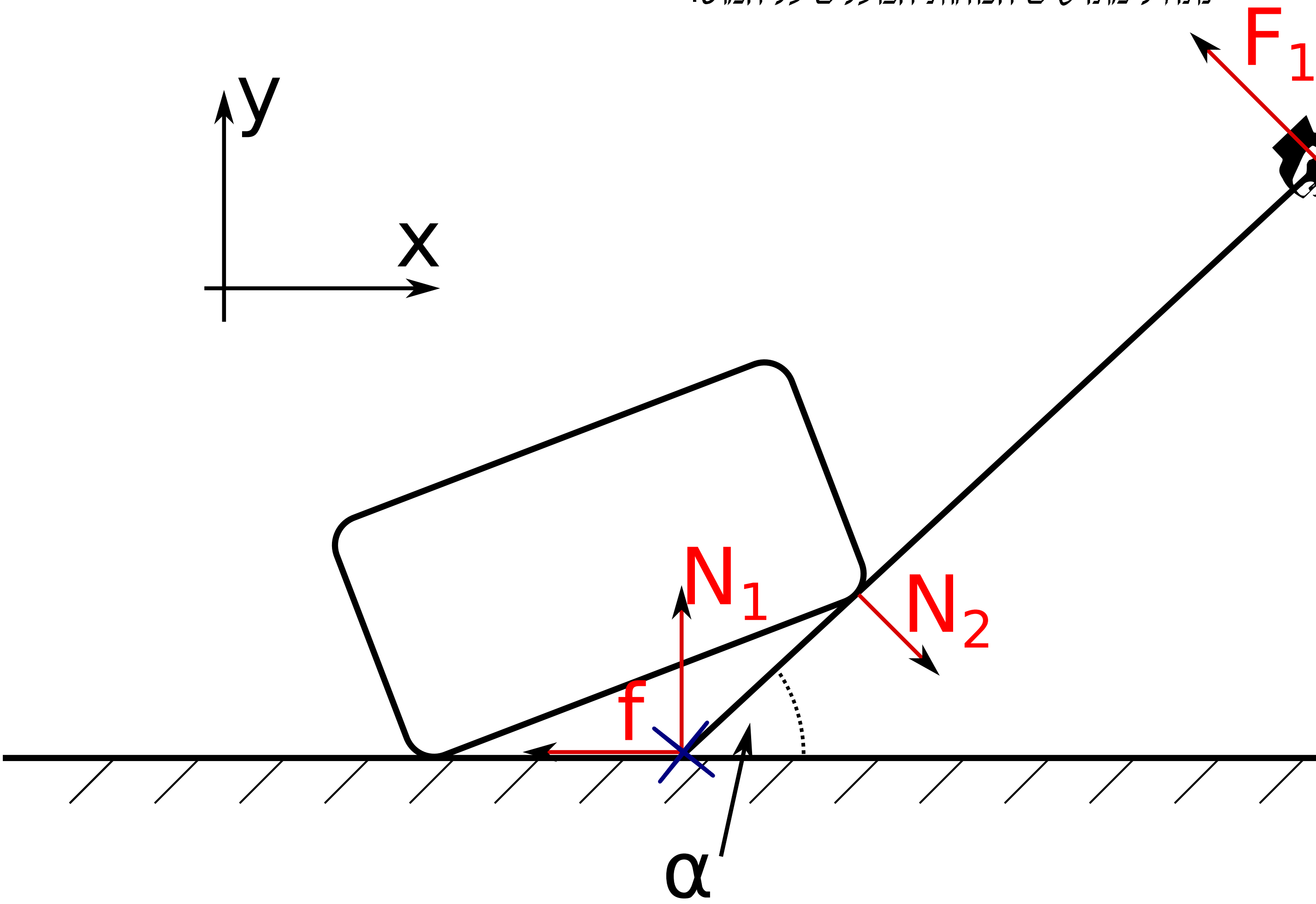
חיסור המשוואות בעצם אומר להחליף את T_R ב T_L, ואת x ב$-x$:

$$\begin{aligned} -x &\leq \left(\frac{T_{L_{\text{מקס}}}}{m_c g} - \frac{m_B}{2m_c} - \frac{1}{2}\right) \cdot L \\ x &\geq -\left(\frac{400N}{40kg 10\frac{N}{kg}} - \frac{20kg}{80kg} - \frac{1}{2}\right) \cdot 2m \\ x &\geq -0.5m \end{aligned}$$

כלומר $-0.5m \leq x \leq 0.25m$

הרמת קופסאות

נתחיל מתרשים הכוחות הפועלים על המוט:



המערכת במנוחה, ולכן ידוע שסכום המומנטים מתאפס. נבחר כנקודת ציר את נקודת המגע עם הרצפה, ונחשב את המומנטים. נתון לנו שנקודת המגע של הפינה הימנית של הקופסא היא ברבע מאורך המוט. נסמן את אורך המוט בL ונקבל את סכום המומנטים:

$$\sum \tau = F_1 L - N_2 \frac{L}{4} = 0$$
$$F_1 L = N_2 \frac{L}{4}$$
$$N_2 = 4F_1$$

וקיבלנו שהכוח הפועל על הפינה הימנית של הקופסא הוא פי 4 מהכוח אותו אנחנו מפעילים. זו דוגמא ל"מכונה פשוטה" (חפשו בויקיפדיה), שעוזרת מאוד בביצוע מטלות. שימו לב שהעבודה שנעשית (אינטגרל על כוח כפול דרך) זהה כמובן. לא ניתן להרוויח אנרגיה מכלום, אבל ניתן להפעיל פחות כוח על דרך ארוכה יותר.

בשביל הכוח שהמוט מפעיל על הרצפה נוסיף את משוואות הכוחות בשני הצירים:

$$F_1 \cos\alpha - N_2 \cos\alpha + N = 0$$
$$-F_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha - f = 0$$

נקבל מיידית:

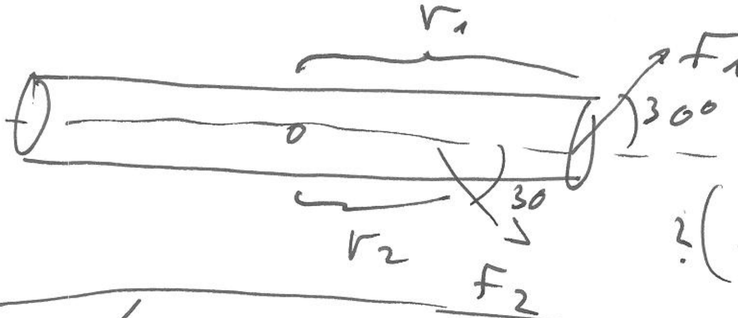
$$N = N_2 \cos\alpha - F_1 \cos\alpha = 4F_1 \cos\alpha - F_1 \cos 2\alpha = 3F_1 \cos\alpha$$

בשביל לקבל את החיכוך, נעזר בתנאי על חיכוך סטטי, יחד עם משוואת הכוחות בציר x:

$$\begin{aligned} f &\leq \mu_s N \\ f &= -F_1 \sin\alpha + N_2 \sin\alpha = -F_1 \sin\alpha + 4F_1 \sin\alpha = 3F_1 \sin\alpha \\ &= N \tan\alpha \\ N \tan\alpha &\leq \mu_s N \\ \mu_s &\geq \tan\alpha \end{aligned}$$

כאשר בדרך הצבנו $3F_1 \cos\alpha = N$.
קיבלנו תנאי על מקדם החיכוך שתלוי רק בזווית המוט.

מוט אחיד חופשי להסתובב סביב מרכז
מסתו. כוח של 5N שזוויתו 30 מעלות
מהמוט פועל עליו במרחק של 4m. כוח נוסף
של 5N פועל ב~~זווית~~ זווית של 30 מעלות ובכיוון ההפוך
לכוח הראשון, במרחק של 2 מטרים מצידו
השני. הכוחות פועלים עליו ביחס על מרכז המסה.



מה אגף המומנט הכולל שפועל על המוט (ב-N·m)?

א) 0 ב) 5 ג) 7 ד) 3

התשובה הנכונה היא ב

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2$$

$$\tau_1 = \vec{r}_1 \times F_1 = |r_1| \cdot |F_1| \cdot \sin(\theta_1) = 4_m \cdot 5_N \cdot 0.5$$

$$\tau_2 = \vec{r}_2 \times F_2 = |r_2| \cdot |F_2| \cdot \sin(\theta_2) = 2m \cdot 5N \cdot (-0.5)$$

$$\sum \tau = \tau_1 + \tau_2 = 10_{N\cdot m} - 5_{N\cdot m} = 5_{N\cdot m}$$

$\boxed{\text{לכן התשובה היא ב } 5_{N\cdot m}}$