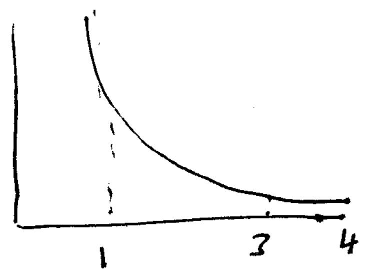
1-4113

נתון כוח $F = \frac{A}{x^2}$ $A = 9\ N \cdot m^2$

מה העבודה הנדרשת כנגד הכוח מ $x = 1m$ ל $x = 3m$?



פתרון.

$$W = A \int_1^3 \frac{dx}{x^2} = \left. \frac{-A}{x} \right|_1^3$$

$$= -\frac{A}{3} + A = \underline{\underline{\frac{2}{3} A}}$$

►*Evaluate the line integral* $I = \oint_C x\,dy$*, where* C *is the circle in the* xy*-plane defined by* $x^2 + y^2 = a^2$, $z = 0$.

Adopting the usual convention mentioned above, the circle C is to be traversed in the anticlockwise direction. Taking the circle as a whole means x is not a single-valued function of y. We must therefore divide the path into two parts with $x = +\sqrt{a^2 - y^2}$ for the semicircle lying to the right of $x = 0$, and $x = -\sqrt{a^2 - y^2}$ for the semicircle lying to the left of $x = 0$. The required line integral is then the sum of the integrals along the two semicircles. Substituting for x, it is given by

$$\begin{aligned} I = \oint_C x\,dy &= \int_{-a}^{a} \sqrt{a^2 - y^2}\,dy + \int_{a}^{-a} \left(-\sqrt{a^2 - y^2}\right)\,dy \\ &= 4\int_0^a \sqrt{a^2 - y^2}\,dy = \pi a^2. \end{aligned}$$

Alternatively, we can represent the entire circle parametrically, in terms of the azimuthal angle ϕ, so that $x = a\cos\phi$ and $y = a\sin\phi$ with ϕ running from 0 to 2π. The integral can therefore be evaluated over the whole circle at once. Noting that $dy = a\cos\phi\,d\phi$, we can rewrite the line integral completely in terms of the parameter ϕ and obtain

$$I = \oint_C x\,dy = a^2 \int_0^{2\pi} \cos^2\phi\,d\phi = \pi a^2. \blacktriangleleft$$

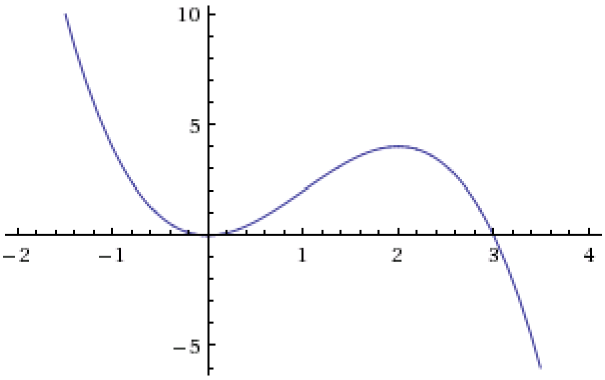
<u>השאלה:</u>

חלקיק במסה m נע תחת השפעת פוטנציאל מהצורה $U(x)=3x^2-x^3\,[J]$

א) שרטטו גרף של הפוטנציאל כפונקציה של x
ב) מצאו את הכח הפועל על החלקיק, שרטטו גרף של הכח כפונקציה שלx
ג) מצאו את נקודות שיווי המשקל, האם הם יציבות?
ד)תארו את תנועת החלקיק במקרים הבאים:
1)האנרגיה הכוללת היא 2 Jוהחלקיק נמצא בראשית.
2)האנרגיה הכוללת היא 5 Jוהחלקיק נמצא בראשית.
3)האנרגיה הכוללת היא 1 Jוהחלקיק נמצא במרחק 3 מטר מהראשית.

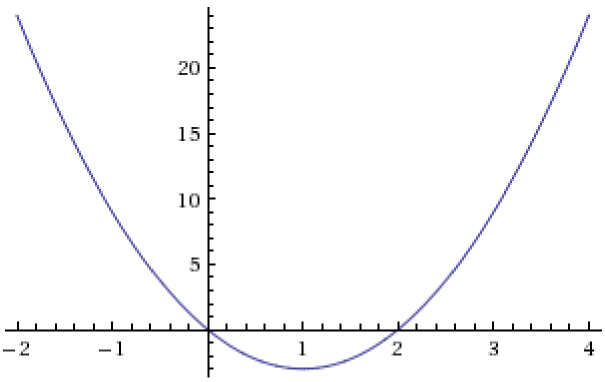
<u>הפתרון:</u>

א) מתוך וולפראם אלפא (http://www.wolframalpha.com/input/?i=Plot%5B3+x%5E2+-+x%5E3%2C+%7Bx%2C+-2%2C+4%7D%5D)



ב) הכוח הוא מינוס נגזרת הפוטנציאל: $F(x)=-\frac{dU(x)}{dx}=-6x+3x^2\,[N]$

מתוך וולפראם אלפא: (http://www.wolframalpha.com/input/?i=Plot%5B-1*D%5B3+x%5E2+-+x%5E3%5D%2C+%7Bx%2C+-2%2C+4%7D%5D)



ג) נקודות ש"מ הן המקומות בהם הנגזרת (הכח) שווה ל-0: $-6x+3x^2=0 \to x_1=0;\ x_2=2$

ממראה פונקציית ניתן להבחין הנקודה X1 היא נקודת ש"מ יציב והנקודה X2 היא נקודת ש"מ לא יציב.

נאפיין את הנקודות גם באמצעות הנגזרת השנייה של הפוטנציאל

$$\frac{d^2U(x)}{dx^2}=-6+6x \to \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x1}=-6 \quad \left.\frac{d^2U(x)}{dx^2}\right|_{x2}=6$$

נמצא שאופי נקודות הקיצון זהה לזה שנמצא מתוך בחינת הפוטנציאל.

ד) האנרגיה הכוללת של החלקיק קבועה, כאשר החלקיק נע לאורך ציר ה-X אנרגיה קינטית מומרת לפוטנציאלית ולהפך. בכל מקום שבו האנרגיה המכנית שווה לאנרגיה הפוטנציאלית תימצא נקודת מפנה, המצב של חלקיק הנע בין נקודות מפנה מכונה "מצב קשור". אם באחד הכיוונים אין לחלקיק נקודת מפנה תנועתו תהיה חופשית בכיוון זה, המצב של חלקיק הנע בצורה זו מכונה "מצב לא קשור".

1) כאשר האנרגיה הכוללת היא $E_{mec}=2[J]$ והחלקיק ממוקם בראשית הוא חסום בין שתי נקודות ולכן תנועתו היא של "מצב קשור".

12) כאשר האנרגיה הכוללת היא $E_{mec}=5[J]$ והחלקיק ממוקם בראשית הוא לא חסום על ידי המחסום שמימין (גובהו רק $U(x)=4[J]$) ולכן תנועתו היא של "מצב לא קשור".

3) כאשר האנרגיה הכוללת היא $E_{mec}=5[J]$ והחלקיק ממוקם ב $x=3[m]$ הוא לא חסום ולכן תנועתו היא של "מצב לא קשור".

(3)

גוף שמסתו m נע לאורך ציר x בהשפעת הכח $\vec{F}=-\alpha x^2\hat{x}$ כאשר $\alpha>0$

נתון כי ברגע $t=0$ מיקום הגוף $x(0)=x_i$ ו $v(0)=v_i$ $\quad v_i>0$

א) מהי העבודה שמבצע הכח $\vec{F}$ על המסה מנק' x_i לנק' x_f ; $\quad x_f>x_i$

ב) רשמו את האנרגיה המכנית הכוללת של הגוף.

ג) מהי הנקודה הרחוקה ביותר מהראשית אליה יגיע הגוף?

$$W=\int_{x_i}^{x_f}\vec{F}\cdot d\vec{s}=-\alpha\int_{x_i}^{x_f}x^2\,dx=-\frac{\alpha}{3}\left(x_f^3-x_i^3\right)=\frac{\alpha}{3}\left(x_i^3-x_f^3\right)$$

ב) ממשפט העבודה והאנרגיה $\quad W_{i\to f}=E_{k_f}-E_{k_i}$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3-\frac{\alpha}{3}x_f^3=\frac{1}{2}mv_f^2-\frac{1}{2}mv_i^2$$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3+\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{1}{2}mv_f^2+\frac{\alpha}{3}x_f^3=const=E=\frac{1}{2}mv^2+\frac{\alpha}{3}x^3$$

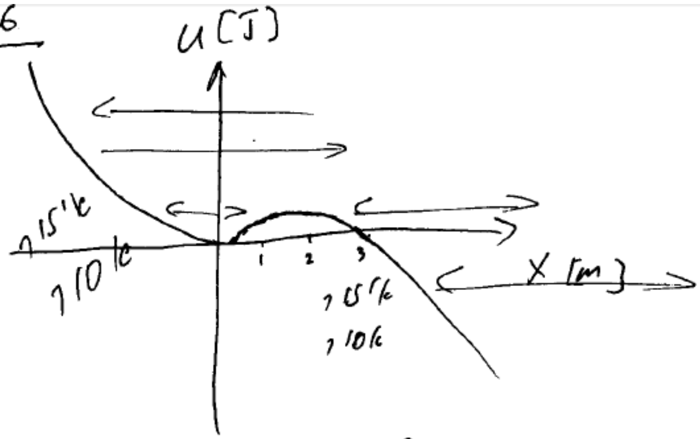
באותה דרך יכולנו לקבל $\quad F=-\frac{dU}{dx}\Rightarrow U=-\int F\,dx=\frac{\alpha}{3}x^3$

ג) עבור הנק' הרחוקה ביותר $v_f=0$

$$\frac{\alpha}{3}x_i^3+\frac{1}{2}mv_i^2=\frac{\alpha}{3}x_f^3$$

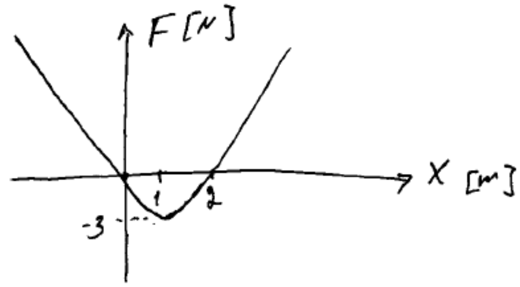
$$x_f=\left(x_i^3+\frac{3m}{2\alpha}v_i^2\right)^{\frac{1}{3}}$$

13_1_026



א) $F = -\nabla U = -6x + 3x^2$

ב)



ג) $F = 0 \Rightarrow x = 0;\ x = 2$

$x = 0$ נק' שווי משקל יציב

$x = 2$ נק' שווי משקל רופף

ד) להסתכל על הגרף

פתרון 2

אם $\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$ עבור שדה וקטורי $\vec{F}$ בתחום שבו לשדה אין נקודות סינגולריות אזי $\vec{F}$ נקרא שדה משמר.

אם השדה משמר קיימת פונקציה U כך ש $\vec{F}=-\vec{\nabla}U$ (U נקראת פונקציית פוטנציאל)

$\boxed{\text{סעיף ג}}$

$$\vec{F}=\left(2yz(1-6xyz),\ 2xz(1-6xyz),\ 2xy(1-6xyz)\right)$$

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=\left(\partial_y F_z-\partial_z F_y,\ \partial_z F_x-\partial_x F_z,\ \partial_x F_y-\partial_y F_x\right)=$$

$$=\big(2x(1-12xyz)-2x(1-12xyz),$$
$$2y(1-12xyz)-2y(1-12xyz),$$
$$2z(1-12xyz)-2z(1-12xyz)\big)=(0,0,0)$$

לכן השדה משמר

פונקציית הפוטנציאל U מקיימת שלוש משוואות

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-F_x,\quad \frac{\partial U}{\partial y}=-F_y,\quad \frac{\partial U}{\partial z}=-F_z$$

מכאן

$$U=-2xyz(1-3xyz)+\underset{\text{קבוע}}{C}$$

$\boxed{\text{סעיף ד}}$

$$\vec{F}=\big(y^2+z^2+2(xy+yz+zx),$$
$$x^2+z^2+2(xy+yz+zx),$$
$$y^2+x^2+2(xy+yz+zx)\big)$$

השדה משמר

$$\vec{\nabla}\times\vec{F}=0$$

פונקציית הפוטנציאל U מקיימת שלוש משוואות

$(1)\quad \frac{\partial U}{\partial x} = -F_x = -y^2 - z^2 - 2(xy + yz + zx)$

$(2)\quad \frac{\partial U}{\partial y} = -F_y = -x^2 - z^2 - 2(xy + yz + zx)$

$(3)\quad \frac{\partial U}{\partial z} = -F_z = -y^2 - x^2 - 2(xy + yz + zx)$

נעשה אינטגרל של (1) לפי x

-״- (2) לפי y

-״- (3) לפי z

$(1')\quad U = -xy^2 - xz^2 - x^2y - x^2z - 2xyz + f_1(y,z)$

$(2')\quad U = -yx^2 - yz^2 - xy^2 - zy^2 - 2xyz + f_2(x,z)$

$(3')\quad U = -zy^2 - zx^2 - yz^2 - xz^2 - 2xyz + f_3(x,y)$

(כאשר נעשה נגזרת חלקית ל(1') לפי x ה-f_1 יפול ונקבל (1), כי f_1 אינה תלויה ב x)

לפי מה ששלוש הביטויים ל U (1') | (2') | (3') יצאו נבחר

$f_3(x,y) = -xy^2 - yx^2 + C$

$f_2(x,z) = -xz^2 - zx^2 + C$

$f_1(z,y) = -zy^2 - yz^2 + C$ $\qquad$ C-קבוע כלשהו

קיבלנו

$U = -xy^2 - yx^2 - xz^2 - zx^2 - zy^2 - yz^2 + C$