גוף נופל על קפיץ

עבודה בהגדרתה שווה ל $W = \int \vec{F}\vec{dr}$. במהלך הכיווץ, הכוחות הפועלים הם כוח הקפיץ כלפי מעלה, וכוח הכובד כלפי מעלה. נבחר מערכת צירים עם קואורדינטה y בכיוון מעלה, כאשר ראשיתה במישור הקפיץ הרפוי. עבודת הכובד היא:

$$W_g = \int_0^{-d} -mgdy = -mgy|_0^{-d} = mgd$$

עבודת כוח הקפיץ היא:

$$W_k = \int_0^{-d} k|y|dy = -\int_0^{-d} kdy = -\frac{ky^2}{2}|_0^{-d} = -\frac{kd^2}{2}$$

על מנת לקבל את מהירות המסה ברגע הפגיעה, נעזר בשיקולי אנרגיה. אנחנו יודעים את העבודה שנעשית על הגוף מרגע הפגיעה ועד עצירתו. לפי משפט עבודה - אנרגיה, זה ההפרש באנרגיה הקינטית. נסמן את מהירות הפגיעה ב v_0:

$$K_i + W = K_f$$

$$\frac{mv_0^2}{2} + mgd - \frac{kd^2}{2} = 0$$

$$v_0^2 = \frac{k}{m}d^2 - 2gd$$

העבודה שהכובד עושה מגובה h ועד הקפיץ, היא $W_g = mgh$. האנרגיה הקינטית בתחילה היא אפס, ובנקודת המפגש עם הקפיץ, היא לפי המהירות מהסעיף הקודם:

$$K_i + W = K_f$$

$$0 + mgh = \frac{mv_0^2}{2} = \frac{kd^2}{2} - mgd$$

$$h = \frac{k}{2mg}d^2 - d$$

בשביל הסעיף האחרון, קודם כל נביע את d באמצעות h:

$$\frac{k}{2mg}d^2 - d - h = 0$$

$$d_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4h\frac{k}{2mg}}}{\frac{k}{mg}} = \frac{mg}{k}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4h\frac{k}{2mg}}\right)$$

הפתרון הרלוונטי הוא זה עם סימן הפלוס. אם נכפיל את h נקבל:

$$\tilde{d} = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 4h\frac{k}{2mg}}\right) = \frac{mg}{k}\left(1 + \sqrt{1 + 2 \cdot 4\frac{k}{2mg}\left(\frac{k}{2mg}d^2 - d\right)}\right)$$

בס"ד

1_4117 - פתרון:

נתונים:

$$F(x)=\begin{cases} 2x & 0\le x\le 5 \\ 10 & 5\le x\le 15 \\ 40-2x & 15\le x\le 20 \end{cases}$$

$$m=5\,kg,\quad v_0=4\,m/s.$$

א. עבודה בכל אחד מהקטעים:

$$W_1=\int_{x=0}^{x=5}F_1(x)\,dx=\int_0^5 2x\,dx=\left[x^2\right]_0^5=25\,j \quad (1)$$

$$W_2=\int_{x=5}^{x=15}F_2(x)\,dx=\int_5^{15}10\cdot dx=\left[10x\right]_5^{15}=10(15-5)=100j \quad (2)$$

$$W_3=\int_{x=15}^{x=20}F_3(x)\,dx=\int_{15}^{20}(40-2x)\,dx=\left[40x-x^2\right]_{15}^{20}= \quad (3)$$

$$=40\cdot 20-20^2-40\cdot 15+15^2=25\,j$$

ב. לפי משפט עבודה-אנרגיה, השינוי באנרגיה הקינטית שווה לסך כל העבודה:

$$\Delta E=W_1+W_2+W_3=150\,j$$

ג.

$$\Delta E=\frac{1}{2}mv_1^2-\frac{1}{2}mv_0^2$$

$$v_1^2=v_0^2+\frac{2\Delta E}{m}$$

מהירות הגוף לאחר 20 מטרים - $v_1=\sqrt{v_0^2+\frac{2\Delta E}{m}}=\sqrt{16+\frac{2\cdot 150}{5}}\approx 8.72\,m/s$

גוף מחליק

נפתור את השאלה ע"י חישוב העבודה שנעשתה על הגוף, והשוואת עבודה זו להפרש האנרגיה הקינטית.
על הגוף פועלים שלושה כוחות: הכובד (mg), הנורמל (N), והחיכוך (f).
הנורמל תמיד ניצב לתנועה, ולכן לא מבצע עבודה.

1. בקטע המעגלי (A-B) כיוון כוח הכובד הוא כלפי מטה, והחלק הרלוונטי מכוח זה (המקביל לכיוון התנועה) הוא: $mg\cos\theta$
כיוון כוח החיכוך הוא תמיד נגד כיוון התנועה, וגודלו משתנה על פי הנוסחא שניתנה לנו בשאלה.
המסלול שלנו הוא לאורך קשת המעגל, ולכן : $ds = Rd\theta$
לסיכום, סך העבודה שנעשתה על הגוף בקטע המעגלי היא:

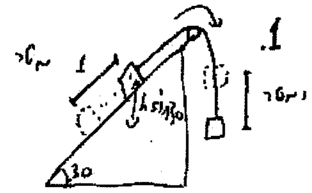
$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (mg\cos\theta - \frac{b}{\pi^4}\theta^3) Rd\theta = \left(mg\sin\theta - \frac{b}{\pi^4}\frac{\theta^4}{4}\right)R\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = mgR - \frac{b}{\pi^4}\frac{\pi^4}{64} = mgR - \frac{b}{64}R$$

נשאלנו מה יהיה המקדם b כך שמהירות בנקודה B תהיה זהה למהירות בנקודה A, כלומר שסך העבודה שנעשתה על הגוף היא אפס. התשובה היא כש $b = 64mg$

2. בסעיף זה שואלים, עם המקדם b שמצאנו, מה יהיה המרחק B-C. למעשה, אם המקדם b הוא שמצאנו, אנחנו יודעים שלא התבצעה על הגוף עבודה בקטע המעגלי, ולכן מהירותו בנקודה B שווה למהירותו ההתחלתית v0 מהנקודה A!
אז השאלה היא מה המרחק שיעבור גוף עם מהירות התחלתית v0, כאשר פועל עליו חיכוך עם המקדם μ
מכיוון שהגוף מונח על השולחן, ולא מאיץ בכיוון האנכי, הנורמל שווה לכוח הכובד (N=mg). ולכן החיכוך הקינטי הוא:
$$f_k = \mu N = \mu mg$$
ורק החיכוך הקינטי עושה עבודה (הכובד והנורמל אנכים לתנועה). נחשב את העבודה לאורך קטע באורך L.
$$W = \int_0^L -\mu mg dx = -\mu mgL$$
עכשיו נוסיף את התנאי שהמהירות הסופית היא 0, ובעזרת משפט העבודה-אנרגיה :
$$m\frac{0^2}{2} - m\frac{v_0^2}{2} = W = -\mu mgL$$
$$L = \frac{v_0^2}{2\mu g}$$
וזו התשובה לשאלה. כדאי לבדוק שהיחידות מסתדרות.

1)

פתרון תרגיל 5



$h = 1m$ מתקיים [illegible] בהתחלה.

(נניח שהמסה נע בכיוון הנמוך).

$$E_{התחלה} = m_2 g h$$

$$\|$$

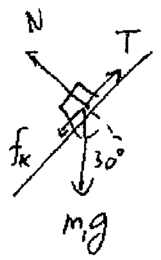
$$E_{סוף} = m_1 g h \sin 30 + \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2$$

(אותה מהירות לשתיהן (אותו חוט)).

$$v = \left[\frac{2}{m_1+m_2}(gh)(m_2 - m_1\sin 30)\right]^{1/2} = \underline{\underline{8.85\ m/s}}$$

שימו לב שאם לא היינו יודעים מהן המסות אז $m_2 - m_1\sin 30$ יכול להיות שלילי שזה אומר שגוף לא קולט נדה בכיוון הנמוך אלא נגדו (קבוצה זאת כי ברור שהוא נע בכיוון הנמוך).

ב. (הביטוי לא שינוי / לא השתנה f_k):



$$E_{סוף} = E_{התחלה} + W_{f_k}$$

$$W_{f_k} = -f_k \cdot h = -\mu_k N h = -\mu_k m_1 g \cos 30 \cdot h$$

כלומר:

$$\frac{1}{2}(m_1+m_2)v^2 = (m_2 - m_1\sin 30)gh - \mu_k m_1 g \cos 30 h$$

$$\Downarrow$$

$$v = \underline{\underline{8.05\ m/s}}$$