שאלה:

גלגל שרדיוסו 0.25 m מתגלגל ללא החלקה על משטח אופקי. הגלגל מאיץ בתאוצה זוויתית a=6 RAD/s^2 בתחילת תנועתו הגלגל היה במנוחה. מה המרחק שהגלגל יעבור לאחר 3 שניות?

א. 0 m
ב. 13.5m
ג. 27m
ד. 7.25m

פתרון:

התשובה הנכונה היא: ד'

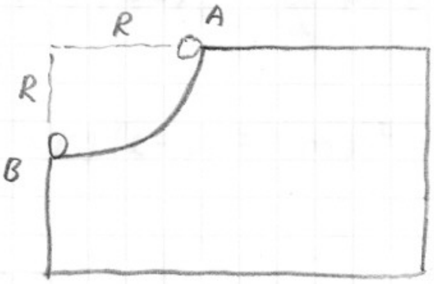
חישוב:

מכוון שהגלגל נע **ללא החלקה** ניתן להשתמש בקשר $a = R \cdot \alpha$, כלומר, התאוצה של מרכז המסה תהיה $a = 0.25m \cdot 6\frac{Rad}{s^2} = \frac{6}{4} = 1.5\frac{m}{s^2}$, הביטוי לדרך שהגלגל יעבור תהיה $x(t) = \frac{1}{2}at^2$, לאחר 3 שניות מרחק זה הוא $x(3) = \frac{1}{2}1.5 \cdot 3^2 = \frac{3}{4} \cdot 9 = \frac{27}{4}m \approx 7m$.

דרך נוספת היא מציאת הזווית הכולל שאותה הגלגל עבר: $\theta(3) = \frac{1}{2}\alpha \cdot t^2 = \frac{6}{2} \cdot 9 = 27Rad$, הדרך הכוללת שווה לאורך הקשת שהגלגל חצה: $x(3) = \theta(3) \cdot R = 27 \cdot 0.25 \approx 7m$

גליל חלול שמסתו $m=0.1_{kg}$ ורדיוסו $r=0.05_m$ מתגלגל ללא
החלקה מנקודה A לנקודה B על פני גוש שחתוך בו $\frac{1}{4}$ מעגל
כמתואר בתרשים. (הוא מתגלגל בשקע משיק למשטח של הגוש.)
מסת הגוש $M=0.45_{kg}$ ורדיוס ה"מעגל" הינו $R=2_m$.
הגוש נמצא על משטח אופקי חלק.

מצא את מהירות הגליל והגוש ברגע שהגליל מגיע ל B.



פתרון
נסתכל על מערכת
(גוש + גליל)
מערכת אינרציאלית.

לפי שימור אנרגיה:

$$\underset{}{mg(R-r)} = \frac{1}{2} \overset{\text{גליל}}{m V_B^2} + \frac{1}{2} \overset{\text{גליל}}{I \omega^2} + \frac{1}{2} \underset{\text{גוש}}{M V^2}$$

כאשר:

$mg(R-r)$ אנרגיה פוטנציאלית יחסית ל B.

$\frac{1}{2}I\omega^2$ - האנרגיה הסיבובית של הגליל בנקודה B.

$\frac{1}{2}mV_B^2$ - האנרגיה הקינטית "הקווית" של הגליל בנקודה B.

$\frac{1}{2}MV^2$ - האנרגיה הקינטית של הגוש.

בגלל שאין החלקה V' גליל-גוש יהיה שווה ל ωr.

$$V' = V_{\text{גליל}} - V_{\text{גוש}}$$

לפי שימור תנע קווי

$$mV_x + MV_x = 0$$

$$V_x = -\frac{m}{M} v_x$$

$V_x = V$ שמר המהירות על בין אתך לגל

$V_x = V$

$$\boxed{V' = V - \bar{V} \Rightarrow V' = V + \frac{m}{M} V = V\left(1 + \frac{m}{M}\right)}$$

$$mg(R-r) = \frac{1}{2} m V^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} \frac{m^2 V^2}{M^2} \quad \cdot 2$$

$$2mg(R-r) = mV^2 + m\underbrace{r^2\omega^2}_{V'^2} + V^2 \frac{m^2}{M^2}$$

$/m$

$$\underline{2g(R-r)} = V^2 + \left(V + \frac{m}{M}V\right)^2 + V^2 \frac{m}{M} =$$

$$= V^2 + V^2 + 2\frac{m}{M}V^2 + \frac{m^2}{M^2}V^2 + V^2\frac{m}{M} =$$

$$= V^2\left[2 + 3\frac{m}{M} + \frac{m^2}{M^2}\right] = \underline{2.72 V^2}$$

לוף2 $V_B = 3.75$ m/s

לוח $\bar{V} = -0.8336$ m/s

נחשב את המהירות שחייבת להיות לכדור בהגיעו לשיא הגובה על מנת שישלים סיבוב. נעשה זאת באמצעות שיקולי כוחות. בנקודת שיא הגובה:

$$\sum F_y = 0 = m\frac{v^2}{R} - mg - N \rightarrow N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right)$$

סיבוב שלם יושלם אם בנקודה הזו הנורמאל יהיה גדול מאפס, ולכן:

$$N = m\left(\frac{v^2}{R} - g\right) > 0 \rightarrow v^2 > gR$$

כעת, נחפש גובה שחרור שיניב מהירות שכזו בנקודה הקריטית. שיקולי שימור אנרגיה נותנים:

$$mgH = mg2R + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}I\omega^2$$

נשתמש בעובדה שאין החלקה כך ש- $\omega = v/r$ ונציב את מומנט ההתמד הנתון בבעיה:

$$mgH = 2mgR + \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{5}mr^2\right)\left(\frac{v^2}{r^2}\right) = 2mgR + \frac{7}{10}mv^2$$

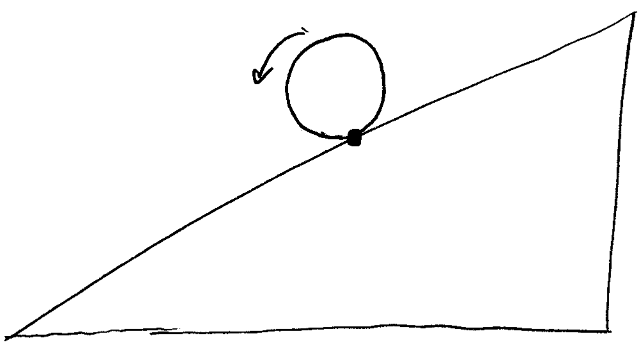
נבודד את המהירות ונדרוש את התנאי שקיבלנו מקודם:

$$v^2 = \frac{10g}{7}\left(H - 2R\right) > gR \rightarrow \boxed{H > \frac{27}{10}R}$$

פתרון 1_6412

המשמעות של גלגול ללא החלקה היא שנקודת המגע בין הדיסקה והמדרון אינה נעה על המדרון. נקודת המגע משתנה בכל רגע ורגע.

מכאן שניתן להתייחס לתנועת הדיסקה בכל רגע ורגע כתנועה סיבובית סביב ציר שעובר בדיוק בנקודת המגע בין הדיסקה והמדרון.



מומנט התמד של דיסקה עבור ציר העובר דרך מרכז המסה הוא

$$I_{CM} = \frac{1}{2} m R^2$$

במקרה שלנו הציר עובר במרחק R ממרכז המסה, ולכן לפי חוק שטיינר

$$I = I_{CM} + MR^2 = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 = \frac{3}{2}MR^2$$

הכח הפועל על הדיסקה בכיוון המקביל למדרון הינו $mg\sin\alpha$.

הכח פועל על כל האלמנטים בכדור, אך לצרכי חישוב המומנט שמפעיל כח הכובד נמצה אותו לכדי כח הפועל על מרכז המסה.

מכאן שאורך הזרוע של כח הכבידה הינו R, ולכן המומנט הינו

$$\tau = Rmg\sin\alpha$$

התאוצה הזוויתית α (אל תתבלבל עם הזווית α)

תינתן על ידי

$$\tau = I\alpha$$

$$\Downarrow$$

$$\alpha = \frac{\tau}{I} = \frac{Mg R \sin\alpha}{\frac{3}{2} M R^2} = \frac{2}{3} \frac{g}{R} \sin\alpha$$

התאוצה המשיקית של מרכז המסה בכל רגע ורגע מתקבל

ע"י הכפלת התאוצה הזוויתית במרחק בין ציר הסיבוב לבין

מרכז המסה, שהוא R. ולכן

$$a_{cm} = R\alpha = \frac{2}{3} g \sin\alpha$$